Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur

Hafif Komarullah
SMKS Al-Ishaqi, Jalan Merapi No. 46 Jember
Email: hafififa4@gmail.com

ABSTRAK

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari dengan merepresentasikan objek dengan titik dan hubungan antar objek dengan sisi. Pelabelan graf adalah salah satu topik graf yang memetakan anggota graf berupa titik, sisi, atau keduanya kebilangan bulat non negatif dengan kaidah tertentu. Pelabelan L(2,1) merupakan salah satu contoh pelabelan titik graf dengan syarat titik yang berjarak satu memiliki mutlak selisih label minimal dua dan titik yang berjarak dua memiliki mutlak selisih label minimal satu. Label terbesar dari pelabelan L(2,1) disebut *span*. Setiap graf pasti memiliki lebih dari satu *span*, sehingga dalam topik ini terfokus dalam mencari nilai minimal *span* atau dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}$. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan nilai minimal *span* pada graf gurita, graf siput, dan graf ubur-ubur.

Kata Kunci: Minimal Span, Pelabelan Graf, Teori Graf.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang mempunyai banyak terapan dalam memecahkan berbagai macam masalah (Komarullah, 2023). Dalam penerapannya, teori graf merepresentasikan suatu objek dengan titik dan hubungan antar objek dengan sisi (Mujib, 2019). Leonhard Euler merupakan orang pertama yang memanfaatkan teori graf dalam memecahkan suatu masalah (Kusumastuti & Fran, 2022). Dalam perkembangannya, telah banyak topik graf yang telah dikembangkan. Salah satunya adalah pelabelan graf yang telah pertama kali dikenalkan sekitar tahun 1960-an. Pelabelan graf didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan anggota graf baik titik, sisi, ataupun keduanya ke bilangan bulat non negatif dengan aturan tertentu. Berdasarkan domainnya pelabelan graf dibedakan menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Contoh dari pelabelan titik adalah pelabelan koprima (Komarullah, Slamin, & Wijaya, 2022), pelabelan prima (Ashokkumar & Maragathavalli., 2015), pelabelan $L(2,1)$ dan lain-lain.

Pelabelan $L(2,1)$ adalah fungsi yang memetakan titik pada suatu graf ke bilangan bulat non negatif sedemikian sehingga titik yang berjarak satu memiliki mutlak selisih label minimal dua dan titik yang berjarak dua memiliki mutlak selisih label minimal satu. Griggs dan Roberts pada tahun 1992 mempresentasikan sebuah konsep pelabelan graf dengan jarak dua. Secara matematis, misalkan diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ serta $u, v \in V(G)$ dengan $d(u,v)$ menyatakan jarak antara titik u dan titik v. Pelabelan $L(2,1)$ didefinisikan oleh fungsi $f(V(G) \to \{0,1,2,\dots,k\}$ sedemikian sehingga $|f(u)-f(v)| \geq 2$ jika $d(u,v)=1$ dan $|f(u)-f(v)| \geq 1$ jika $d(u,v)=2$. Label k merupakan label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ yang disebut dengan *span*. Setiap graf tentu memiliki lebih dari satu *span*. Sehingga dalam topik ini, fokus penelitian adalah mencari nilai minimal span dari graf G yang dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}(G)$ $(\text{Shao, Yeh, \& Zhang, 2008})$.

Peneliti sebelumnya telah melakukan penelitian terkait pelabelan $L(2,1)$. Griggs dan Yeh pada tahun 1992 menunjukan bahwa $\lambda_{2,1}(S_{1,n}) = n + 1, \lambda_{2,1}(C_n) = 4$, dan $\lambda_{2,1}(P_n) = 4$ (Griggs & Yeh, 1992). Graf kipas (F_n) dan graf roda (W_n) memiliki nilai minimal *span* yang sama yaitu $n + 1$ (Fatimah, Sudarsana, & Musdalifah, 2016).Yuri et al pada tahun 2018 mempresentasikan nilai minimal *span* pada graf Sierpinski$(S_{n,m})$ adalah 4 untuk $m = 2$ dan $m = 3$ (Sagala & Susiana, 2018). Graf kerucut $(C_{m,n})$, graf *tadpole* $(T_{m,n})$, dan graf barbel (B_n) memiliki minimal span berturut-turut $n + 5$, 4, dan $2n - 1$. (Komarullah, Halikin, & Santoso, 2022). Ikhsanul dan Hafif pada tahun 2022 membuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(F_{n,m}) = 2m + 1, \lambda_{2,1}(W_n^m) = mn - m + n - 1$ untuk m ganjil dan $\lambda_{2,1}(W_n^m) = mn - m + 1$ untuk m genap (Halikin & Komarullah, 2022).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, maka peneliti akan meneliti tentang pelabelan $L(2,1)$ pada graf yang berbeda, yaitu graf gurita, graf siput, dan graf ubur-ubur. Graf tersebut dipilih karena merupakan masalah yang terbuka. Untuk menunjang pembuktian teorema pada penelitian ini, akan ditunjukkan beberapa lema terkait pelabelan $L(2,1)$ sebagai berikut.

Lema 1. (Lum, 2007) *Jika H adalah subgraf dari G, maka* $\lambda_{2,1}(G) \geq \lambda_{2,1}(H)$.

Lema 2. (Griggs & Yeh, 1992) $\lambda_{2,1}(S_{1,n}) = n + 1$.

Lema 3. (Griggs & Yeh, 1992) $\lambda_{2,1}(C_n) = 4$.

Lema 4. (Komarullah, 2020) $\lambda_{2,1}(K_{1,1,t}) = t + 3$.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunukan pada penelitian ini adalah studi literatur yang mengkaji berbagai teori tentang pelabelan $L(2,1)$ berupa jurnal, skripsi, tesis maupun karya ilmiah yang lainnya. Dalam mencari nilai minimal *span* pada graf gurita, graf siput, dan graf ubur-ubur, peneliti menggunakan metode deskriptif aksiomatik dan metode pendeteksian pola. Metode deskriptif aksiomatik digunakan dengan cara memaparkan definisi, lema, ataupun teorema terkait pelabelan $L(2,1)$. Metode pendeteksian pola digunakan untuk mengetahui pola pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$ yang selanjutnya akan digunakan sebagai batas atas pelabelan $L(2,1)$ pada graf gurita, graf siput, dan graf ubur-ubur.

HASIL DAN PEMBAHASAN

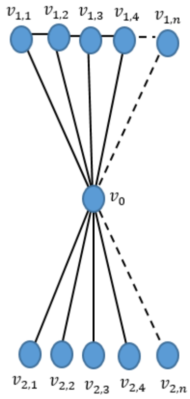
Pada bagian ini akan dibahas tentang pelabelan $L(2,1)$ dan nilai minimal *span* graf gurita, graf siput, dan graf ubur-ubur.

1. Graf Gurita

Graf gurita adalah graf yang dibentuk dari operasi identifikasi titik antara graf kipas (F_n) dan graf bintang $(S_{1,n})$ pada titik yang mempunyai derajat tertingi. Penotasian titik dan sisi pada graf gurita (O_n) adalah sebagai berikut.

$$V(O_n) = \{v_0\} \cup \{v_{1,i}; i \in [1,n]\} \cup \{v_{2,i}; i \in [1,n]\}$$
$$E(O_n) = \{v_0 v_{1,i}, v_0 v_{2,i}; i \in [1,n]\} \cup \{v_{1,i} v_{1,i+1}; i \in [1,n-1]\}$$

Untuk memperjelas penotasian titik pada graf gurita (O_n) dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Gurita (O_n)

Teorema 5. *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 2, \lambda_{2,1}(O_n) = 2n + 1$.

Bukti. Akan ditunjukkan $\lambda_{2,1}(O_n) \geq 2n + 1$. Pandang graf bintang $S_{1,2n}$ sebagai subgraf dari graf gurita O_n. Berdasarkan Lema 1 dan Lema 2 diperoleh $\lambda_{2,1}(O_n) \geq \lambda_{2,1}(S_{1,2n}) = 2n + 1$. Terbukti bahwa, $\lambda_{2,1}(O_n) \geq 2n + 1$. Selanjutnya akan dibuktikan $\lambda_{2,1}(O_n) \leq 2n + 1$ dengan membangun fungsi pelabelan yang sesuai dengan kaidah pelabelan $L(2,1)$. Definisikan fungsi $f(V(O_n) \rightarrow \{0,1,2, \dots ,2n + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 0$$
$$f(v_{1,i}) = 2i; i = 1, 2, \dots, n$$
$$f(v_{2,i}) = 2i + 1; i = 1, 2, \dots, n$$

Akan dibuktikan bahwa setiap titik yang berjarak satu memiliki mutlak selisih label minimal dua.

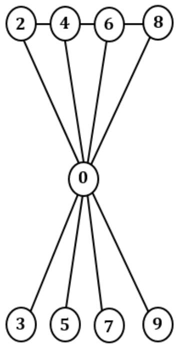
a. Selisih label titik v_0 dan $v_{1,i}$ untuk $i \in [1, n]$.
   $|f(v_o) - f(v_{1,i})| = |0 - (2i)| = 2i \geq 2$ karena $i \in [1, n]$.
b. Selisih label titik v_0 dan $v_{2,i}$ untuk $i \in [1, n]$.
   $|f(v_o) - f(v_{2,i})| = |0 - (2i + 1)| = 2i + 1 \geq 2$ karena $i \in [1, n]$.
c. Selisih label titik $v_{1,i}$ dan $v_{1,i+1}$ untuk $i \in [1, n]$.
   $|f(v_{1,i}) - f(v_{1,i+1})| = |2i - 2(i + 1)| = 2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap titik yang berjarak dua memiliki mutlak selisih label minimal satu.

a. Selisih label titik $v_{1,i}$ dan $v_{2,i}$ untuk $i \in [1, n]$.
   $|f(v_{1,i}) - f(v_{2,i})| = |2i - (2i + 1)| = 1$.
b. Selisih label titik v_0 dan $v_{2,i}$ untuk $i \in [1, n]$.
   $|f(v_o) - f(v_{2,i})| = |0 - (2i + 1)| = 2i + 1 \geq 2$ karena $i \in [1, n]$.
c. Selisih label titik $v_{2,i}$ dan $v_{2,i+1}$ untuk $i \in [1, n]$.
   $|f(v_{2,i}) - f(v_{2,i+1})| = |2i + 1 - 2(i + 1) + 1| = 2 > 1$.

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$, sehingga terbukti $\lambda_{2,1}(O_n) \leq 2n + 1$. Karena $\lambda_{2,1}(O_n) \geq 2n + 1$ dan $\lambda_{2,1}(O_n) \leq 2n + 1$, maka $\lambda_{2,1}(O_n) = 2n + 1$. ■

Untuk memperjelas Teorema 5, disajikan contoh pelabelan $L(2,1)$ graf gurita (O_4) pada Gambar 2. Berdasarkan Gambar 2 diketahui bahwa $\lambda_{2,1}(O_4) = 2(4) + 1 = 9$.



Gambar 2. Pelabelan $L(2,1)$ Pada Graf Gurita (O_4)

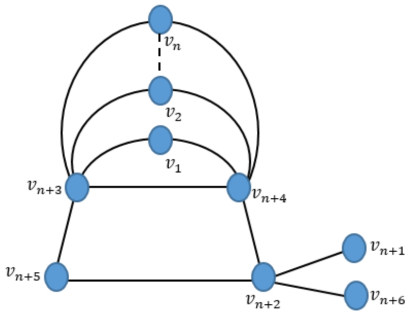
2. Graf Siput

Graf siput merupakan graf yang dihasilkan dari operasi identikasi sisi antara graf buku segitiga B_n dan graf *cycle* C_4. Graf siput dinotasikan dengan SI_n yang memiliki $n + 6$ titik dan $2n + 6$ sisi. Penotasian titik dan sisi pada graf siput SI_n sebagai berikut.

$$V(SI_n) = \{v_i; i \in [1, n + 6]\}$$

$$E(SI_n) = \{v_i v_{n+3}; i \in [1, n]\} \cup \{v_i v_{n+4}; i \in [1, n]\}$$
$$\cup \{v_{n+2}v_{n+4}, v_{n+3}v_{n+4}, v_{n+2}v_{n+5}, v_{n+3}v_{n+5}, v_{n+1}v_{n+2}, v_{n+6}v_{n+2}\}$$

Ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf SI_n dapa dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf Siput (SI_n)

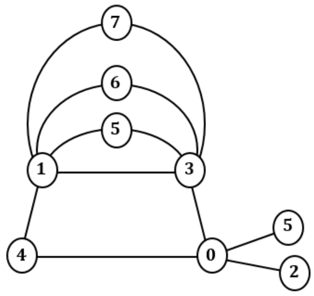
Teorema 6. *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 1$, $\lambda_{2,1}(SI_n) = n + 4$.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(SI_n) \geq n + 4$. Misalkan graf siput (SI_n) dapat dilabeli dengan label-label $0, 1, 2, \ldots, n + 3$. Berdasarkan Lema 3 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(C_4) = 4$, maka titik $v_{n+2}, v_{n+3}, v_{n+3}, \mathrm{dan}\ v_{n+2}$ dilabeli secara berturut-turut 0,3,1, dan 4.Titik v_i berjarak satu dengan titik v_{n+4} dan titik v_{n+3}, sehingga titik v_i hanya dapat dilabeli dengan label $5, 6, \ldots, n + 3$. Titik v_i memiliki n titik sedangkan label pada , $6, \ldots, n + 3$ berjumlah $n - 1$ label. Karena titik v_i dan titik v_{i+1} berjarak satu, maka titik tersebut tidak boleh mempunyai label yang sama atau mutlak selisih labelnya minimal satu. Berdasarkan prinsip saran merpati, terdapat 2 titik yang memiliki label sama. Sehingga dibutuhkan satu label selain label-label $0, 1, 2, \ldots, n + 3$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(SI_n) \geq n + 4$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\lambda_{2,1}(SI_n) \leq n + 4$ dengan membangun fungsi pelabelan pada graf siput (SI_n). Definisikan fungsi $f(V(SI_n) \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, n+4\}$ sebagai berikut.

$$f(v_{n+1}) = 5$$
$$f(v_{n+2}) = 0$$
$$f(v_{n+3}) = 1$$
$$f(v_{n+4}) = 3$$
$$f(v_{n+5}) = 4$$
$$f(v_{n+6}) = 2$$
$$f(v_i) = i + 4; i \in [1, n]$$

Jelas bahwa setiap titik yang berjarak satu memiliki mutlak selisih label minimal dua dan titik yang berjarak dua memiliki mutlak selisih label minimal satu. Sehingga terbukti $\lambda_{2,1}(SI_n) \leq n + 4$. Karena $\lambda_{2,1}(SI_n) \geq n + 4$ dan $\lambda_{2,1}(SI_n) \leq n + 4$, maka terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(SI_n) = n + 4$. ■

Sebagai contoh disajikan pada Gambar 4 pelabelan $L(2,1)$ pada graf siput (SI_3) dengan $\lambda_{2,1}(SI_3) = 3 + 4 = 7$.



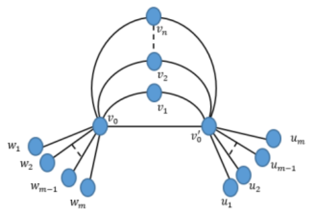
Gambar 4. Pelabelan $L(2,1)$ Pada Graf Siput (SI_3)

3. Graf Ubur-Ubur

Graf ubur-ubur merupakan graf yang dibentuk dengan melakukan operasi identifikasi titik masing-masing satu graf bintang $S_{1,m}$ pada dua titik graf buku segitiga B_n yang memiliki derajat $n + 1$. Graf ubur-ubur dinotasikan dengan $(J_{m,n})$ memiliki $2m + n + 2$ titik dan $2m + 2n + 1$ sisi. Penotasian titik dan sisi pada graf ubur-ubur sebagai berikut.

$$V(J_{m,n}) = \{v_i; i \in [1, n]\} \cup \{u_j; j \in [1, m]\} \cup \{w_k; k \in [1, m]\}$$
$$E(J_{m,n}) = \{v_i v_0; i \in [1, n]\} \cup \{v_i v_0'; i \in [1, n]\} \cup \{v_0 w_k; k \in [1, m]\} \cup \{v_0' u_j; j \in [1, m]\}$$

Ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf SI_n dapa dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Graf Gurita $(J_{m,n})$

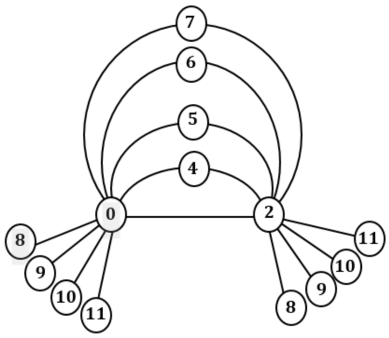
Teorema 7. *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 2$ *dan* $n \geq 1$, $\lambda_{2,1}(J_{m,n}) = m + n + 3$.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(J_{m,n}) \leq m + n + 3$. Berdasarkan Lema 4 $\lambda_{2,1}$ graf buku segitiga $(B_n) = n + 3$. Setiap titik pada graf bintang $S_{1,m}$ berjarak dua dengan titik v_i sehingga harus memiliki label berbeda dengan v_i. Titik-titik pada graf bintang $S_{1,m}$ berjarak dua antara satu titik dan lainnya. Sehingga diperlukan m label untuk melabeli titik pada graf bintang. Terbukti $\lambda_{2,1}(J_{m,n}) \geq m + n + 3$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(J_{m,n}) \leq m + n + 3$ dengan membangun fungsi pelabelan pada graf ubur-ubur $(J_{m,n})$. Definisikan fungsi $f(V(J_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, m + n + 3\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & ; i = 0 \\ 2 & ; i = 0' \\ i + 3; & i = 1,2, \ldots, n \end{cases}$$
$$f(u_j) = j + 7; j = 1,2, \ldots m$$
$$f(w_k) = k + 7; k = 1,2, \ldots, m$$

Jelas bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$, sehingga $\lambda_{2,1}(J_{m,n}) \leq m + n + 3$. Karena $\lambda_{2,1}(J_{m,n}) \geq m + n + 3$ dan $\lambda_{2,1}(J_{m,n}) \leq m + n + 3$, maka terbukti $\lambda_{2,1}(J_{m,n}) = m + n + 3$. ■

Sebagai contoh disajikan pada Gambar 6 pelabelan $L(2,1)$ pada graf ubur-ubur $(J_{4,4})$ dengan $\lambda_{2,1}(J_{4,4}) = 4 + 4 + 3 = 11$.



Gambar 6. Pelabelan $L(2,1)$ Pada Graf Ubur-Ubur $(J_{4,4})$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan didapatkan kesimpulan sebagai berikut.

1. Graf gurita (O_n) untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, $\lambda_{2,1}(O_n) = 2n + 1$.
2. Graf siput (SI_n) untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$, $\lambda_{2,1}(SI_n) = n + 4$.
3. Graf ubur-ubur $(J_{m,n})$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$ dan $n \geq 1$, $\lambda_{2,1}(J_{m,n}) = m + n + 3$.

REKOMENDASI

Berdasarkan hasil penelitian didapatkan minimal *span* pada graf gurita, graf siput, dan graf ubur-ubur. Peneliti merekomendasikan kepada peneliti selanjutnya untuk mencari minimal *span* pada kelas graf berbeda atau graf hasil operasi. Selain itu peneliti menyarankan agar hasil label dari pelabelan $L(2,1)$ yang bersifat unik ini dapat diterapkan sebagai kunci untuk mengenkripsi atau mendekripsi teks dalam bidang keilmuan kriptografi.

UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terima kasih ditunjukan kepada seluruh rekan-rekan kelompok riset di Bimbingan Belajar Smart Learning House yang telah berperan aktif dalam mendiskusikan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Ashokkumar, S., & Maragathavalli., S. (2015). Prime labeling of some special graphs. *IOSR Journal of Mathematics, 11*(1), 01-05.

Fatimah, Sudarsana, & Musdalifah. (2016). Pelabelan L(2,1) Pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*.

Griggs, J., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 586-595.

Halikin, I., & Komarullah, H. (2022). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021.* Jember. doi:10.2991/acsr.k.220202.008

Komarullah, H. (2020). *Pelabelan L (2, 1) Pada Graf Buku Segi Tiga, Graf Kerucut, Graf Tadpole dan Graf Dumbbell Serta Graf Hasil Identifikasi Titik Dari Graf Buku Segi Tiga dan Graflintasan.* Diambil kembali dari http://repository.unej.ac.id/handle/123456789/99497

Komarullah, H. (2023). Pelabelan Prima Dan Koprima Pada Graf P_m⊙K_n Dan Graf P_m⊙P_n. *Prosiding Seminar Pendidikan Matematika dan Matematika*, *8.* doi:https://doi.org/10.21831/pspmm.v8i2.312

Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022). On the Minimum Span of Cone, Tadpole, and Barbell Graphs. *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021).* Jember. doi:10.2991/acsr.k.220202.009

Komarullah, H., Slamin, & Wijaya, K. (2022). A Minimum Coprime Number for Amalgamation of Wheel. *Proceedings of the International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021).* Jember. doi:10.2991/acsr.k.220202.012

Kusumastuti, N., & Fran, F. (2022). Bilangan Invers Dominasi Total Graf Helm Tertutup, Graf Gear, Graf Roda Ganda Dan Graf Antiweb-Gear. *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, 321-330. doi:http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v7i2.7211

Lum, A. (2007). Upper Bound on L(2,1)-labelling Number of Graphs with Maximum Degree∆. doi:https://www.whitman.edu/documents/academics/mathematics/lumaa.pdf

Mujib, A. (2019). Bilangan kromatik permainan graf pot bunga (C_m S_n) dan graf pohon palem (C_k P_l S_m). *Teorema: Teori Dan Riset Matematika*, 13-22. doi:http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v4i1.1903

Sagala, Y., & Susiana. (2018). Pelabelan L(2,1) pada Graf Sierpinski S(n,k). *Jurnal Sains Indonesia*, 22-24.

Shao, Z., Yeh, R. K., & Zhang, D. (2008). The L (2, 1)-labeling on graphs and the frequency assignment problem. *Applied Mathematics Letters*, 37-41.