

PELABELAN TITIK TAK-TERATUR JARAK INKLUSIF PADA GRAF MUSHROOM DAN GABUNGANNYA

Jenni Alfa Nanda Arianti¹, Ikhsanul Halikin², Kusbudiono³, Kristiana Wijaya⁴

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember^{1,2,3,4}
Email: ikhsan.fmipa@unej.ac.id

ABSTRAK

Pelabelan graf merupakan pemberian label pada unsur graf, yaitu titik, sisi, atau keduanya dengan aturan tertentu. Salah satu pelabelan dengan domain titik yaitu pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif. Pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif merupakan pemberian label pada setiap titik graf dengan bilangan $1, 2, \dots, k$, sedemikian sehingga bobot yang diperoleh pada setiap titik bernilai berbeda. Pelabelan ini dikatakan tak-teratur karena label yang diberikan pada setiap titik boleh berulang. Bobot titik pada pelabelan ini didapatkan dengan menjumlahkan label titik yang bertetangga dengan titik tersebut dan label titik itu sendiri. Permasalahan pada pelabelan ini yaitu mencari nilai minimum dari label k terbesar pada sebuah graf. Nilai k yang demikian disebut sebagai *distance irregularity strength* dan dinotasikan dengan $\widehat{dis}(G)$. Pada penelitian ini, akan dicari nilai $\widehat{dis}(G)$ pada graf *mushroom* dan gabungannya dengan $n \geq 3$. Graf *mushroom* merupakan graf yang diperoleh dari hasil melekatkan titik pusat graf kipas F_n dengan titik pusat graf bintang S_n . Penelitian ini mendapatkan hasil bahwa nilai ketidakteraturan titik jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) adalah $\widehat{dis}(Mr_n) = n$ dan gabungan graf *mushroom* ($2Mr_n$) adalah $\widehat{dis}(2Mr_n) = n + 1$ untuk $3 \leq n \leq 11$.

Kata Kunci: *Distance Irregularity Strength*, Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif

Cara sitasi: Arianti, J. A. N., Halikin, I., Kusbudiono & Wijaya, K. (2025). Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf Mushroom dan Gabungannya. *Proceeding Galuh Mathematics National Conference*, 5(1), 143-153.

PENDAHULUAN

Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut $(V(G), E(G))$. $V(G)$ adalah himpunan tak kosong yang setiap elemennya disebut dengan titik dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan tak terurut titik di V yang disebut dengan sisi (Chartrand *et al.*, 2012). Pelabelan graf merupakan fungsi yang memasangkan elemen graf ke himpunan bilangan dengan syarat tertentu. Berdasarkan domainnya, pelabelan graf dibagi menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total (Slamin, 2019). Pelabelan titik (*vertex labeling*) merupakan pelabelan dari suatu graf yang domainnya berupa himpunan titik. Salah satu pelabelan dengan domain titik yaitu pelabelan titik tak-teratur jarak.

Slamin (2017) memperkenalkan modifikasi pelabelan tak-teratur yang disebut sebagai pelabelan titik tak-teratur jarak non-inklusif. Pelabelan titik tak-teratur jarak non-inklusif didefinisikan sebagai pemberian label pada titik dengan himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga nilai bobot yang dihasilkan di setiap titiknya berbeda. Bong, *et al.* (2018) memperkenalkan konsep pelabelan yang disebut dengan pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif. Pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada suatu graf G didefinisikan sebagai suatu fungsi f yang memasangkan himpunan titik ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga bobot setiap titik yang diatur oleh:

$$wt(v) = f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(u)$$

berbeda semua dimana $N(v)$ merupakan himpunan tetangga titik v . Perbedaan antara pelabelan ini dengan pelabelan titik tak-teratur jarak non-inklusif terletak pada cara menentukan nilai bobot di setiap titiknya. Bobot titik yang terdapat di pelabelan tak-teratur jarak inklusif diperoleh dengan menjumlahkan label titik-titik yang bertetangga dan label titik itu sendiri. Permasalahan dalam pelabelan ini adalah melabeli titik-titik dalam graf G dengan bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, k$. Nilai k yang dipilih adalah k yang paling minimum, sehingga diperoleh bobot titik yang berbeda. Nilai k minimum yang demikian disebut dengan nilai kekuatan tak-teratur jarak inklusif (*distance irregularity strength*) dan dinotasikan dengan $\widehat{dis}(G)$ (Baca, *et al.*, (2018).

Graf yang tidak dapat dilabeli secara inklusif dapat dikatakan bahwa nilai $\widehat{dis}(G) = \infty$. Berikut adalah teorema dalam pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif.

Teorema 1.1 Suatu graf G berlaku $\widehat{dis}(G) = \infty$ jika dan hanya jika terdapat dua titik yang berbeda $u, v \in V(G)$ sehingga $N_G[u] = N_G[v]$ dengan $N_G[u]$ merupakan himpunan tetangga titik v termasuk titik v itu sendiri

Teorema 1.2 Misalkan G adalah sebuah graf terhubung yang mempunyai n titik dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ dan tidak ada titik yang mempunyai tetangga yang sama, maka :

$$\widehat{dis}(G) \geq \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$$

Susanto (2021) menambahkan batas bahwa untuk graf yang memiliki banyak daun dinyatakan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 1.3 Misalkan G adalah sebuah graf terhubung yang mempunyai n titik dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ dan n_i merupakan banyaknya titik berderajat i pada G untuk setiap $\delta \leq i \leq \Delta$, maka :

$$\widehat{dis}(G) \geq \max_{\delta \leq i \leq \Delta} \left\lceil \frac{\delta + \sum_{j=\delta}^i n_j}{i+1} \right\rceil$$

Penelitian terkait pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif telah banyak dilakukan. Beberapa graf yang sudah ditemukan nilai kekuatan tak-teratur jarak inklusifnya adalah graf buku (Wahyu *et al.*, 2023), graf tangga segitiga (Utami *et al.*, 2018), graf persahabatan lengkap diperumum (Majid *et al.*, 2023), graf *firecracker*, *broom*, dan *banana tree* (Halikin *et al.*, 2020), graf *cycle* dan roda (Bong *et al.*, 2017). Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan mengenai pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif, penulis ingin melanjutkan penelitian mengenai hasil pelekatan kedua graf yaitu pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n). Graf *mushroom* merupakan hasil pelekatan titik pusat graf kipas F_n dengan titik pusat graf bintang S_n (Nurhakim, 2020). Gabungan graf *mushroom* adalah dua graf *mushroom* yang sama (Henning dan Van Vuuren, 2022). Hasil yang didapatkan berupa nilai $\widehat{dis}(G)$ dari pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungan graf *mushroom* ($2Mr_n$) dengan $n \geq 3$.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* dan gabungannya adalah deduktif aksiomatik dengan membuktikan kondisi dengan teorema yang sudah ada serta pendeteksian pola untuk menemukan pola pelabelan, kemudian merumuskan menjadi suatu rumus fungsi. Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. menotasikan titik pada graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya,
2. mencari nilai batas bawah $\widehat{dis}(G)$ berdasarkan Teorema 1.3,
3. memberi label graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya berdasarkan batas bawah yang diperoleh pada langkah 2 sehingga bobot setiap titiknya berbeda,
4. jika pelabelan yang digunakan tidak memenuhi syarat pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif, maka kembali ke-langkah 2 dan menambahkan nilai batas bawah dengan $\widehat{dis}(G) = k + 1$,
5. menentukan pola pelabelan dan merumuskan bentuk umum pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya,
6. membuktikan nilai $\widehat{dis}(G)$ yang diperoleh pada pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* dan gabungannya dengan $n \geq 3$ dimulai dengan mencari nilai batas bawah pelabelan tak-teratur titik jarak inklusif pada graf *mushroom* dan gabungannya. Selanjutnya melabeli graf *mushroom* dan gabungannya berdasarkan batas bawah, jika tidak sesuai dengan syarat pelabelan tak-teratur titik jarak inklusif, maka menambahkan satu nilai batas bawah sehingga bobotnya berbeda. Kemudian membuktikan $\widehat{dis}(G)$ dengan membuktikan bahwa nilai bobotnya berbeda berdasarkan fungsi yang telah dirumuskan.

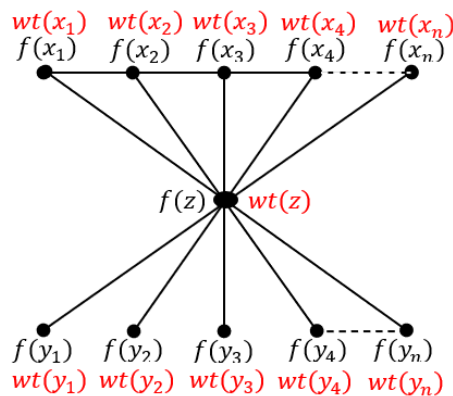
Nilai Ketakteraturan Titik Jarak Inklusif Graf *Mushroom* Mr_n

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai penentuan nilai ketakteraturan titik jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n). Misalkan himpunan titik pada graf ini adalah $V(2Mr_n) = \{x_i, z, y_i | 1 \leq i \leq n\}$. Graf *mushroom* memiliki $2n+1$ titik, dengan n titik berderajat satu, dua titik berderajat dua, $n-2$ titik berderajat tiga, dan satu titik berderajat $2n$. Berdasarkan Teorema 1.3, diperoleh bahwa

$$\widehat{dis}(Mr_n) \geq \max_{\delta \leq i \leq \Delta} \left\lceil \frac{\delta + \sum_{j=\delta}^i n_j}{i+1} \right\rceil$$

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{L}_{\max} \left\{ \left\lceil \frac{\delta + \sum_{j=\delta}^i n_j}{i+1} \right\rceil \right\} \\
 & \mathfrak{L}_{\max} \left\{ \left\lceil \frac{1+n}{1+1} \right\rceil, \left\lceil \frac{1+n+2}{2+1} \right\rceil, \left\lceil \frac{1+n+2+n-2}{3+1} \right\rceil, \left\lceil \frac{1+n+2+n-2+1}{2n+1} \right\rceil \right\} \\
 & \mathfrak{L}_{\max} \left\{ \left\lceil \frac{1+n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3+n}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{1+2n}{4} \right\rceil, \left\lceil \frac{2+2n}{2n+1} \right\rceil \right\} \\
 & \mathfrak{L}_{\max} \left\{ \left\lceil \frac{12n^2+18n+6}{24n+12} \right\rceil, \left\lceil \frac{8n^2+28n+12}{24n+12} \right\rceil, \left\lceil \frac{12n^2+12n+3}{24n+12} \right\rceil, \left\lceil \frac{24n+24}{24n+12} \right\rceil \right\} = \left\lceil \frac{1+n}{2} \right\rceil
 \end{aligned}$$

Berikut merupakan representasi notasi titik graf *mushroom* (Mr_n),



Gambar 1. Notasi Pelabelan Jarak Inklusif Graf *Mushroom*

Berdasarkan Teorema 1.3, $\widehat{dis}(Mr_n) \geq \left\lceil \frac{1+n}{2} \right\rceil$. Untuk mengoptimalkan pelabelan jarak inklusif graf *mushroom* (Mr_n), maka bobot terkecilnya adalah 2. Bobot 2 harus diperoleh dari penjumlahan label titik z dan label titik salah satu daun. Karena banyaknya daun adalah n dan bobot setiap titik harus berbeda maka bobot terbesar pada daun adalah $1+n$. Dengan demikian, tidak mungkin $\widehat{dis}(Mr_n) = \left\lceil \frac{1+n}{2} \right\rceil$.

Berikut merupakan Lema terkait batas bawah yang digunakan dalam pelabelan tak-teratur titik jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n).

Lema 1.4 Jika Mr_n adalah graf *mushroom* dengan $n \geq 3$, maka $\widehat{dis}(Mr_n) \geq n$.

Bukti. Misalkan $V(Mr_n) = \{x_i, z, y_i \mid i \in [1, n], n \geq 3\}$ merupakan himpunan titik graf *mushroom* Mr_n , dengan y_i merupakan daun dari graf *mushroom* (Mr_n) untuk setiap $i \in [1, n]$ dan z adalah titik dengan derajat $2n$. Misalkan pula bahwa $f: V(Mr_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \widehat{dis}(Mr_n)\}$. Karena graf *mushroom* (Mr_n) memiliki jumlah daun sebanyak n dan bobot setiap daun, yaitu $wt(y_i) = f(z) + f(y_i)$ harus berbeda untuk setiap daun y_i maka jelas bahwa untuk memperoleh bobot terkecil, $f(z)$ harus bernilai 1 dan daun-daun y_i pada graf *mushroom* (Mr_n) harus memiliki label titik yang berbeda. Sehingga bobot terkecil daun pada graf *mushroom* (Mr_n) adalah 2 dan bobot terbesarnya adalah $n+1$. Karena bobot daun adalah penjumlahan dari label daun dan $f(z)$, maka minimal label terbesar daun graf *mushroom* Mr_n adalah n . Artinya $\widehat{dis}(Mr_n) \geq n$

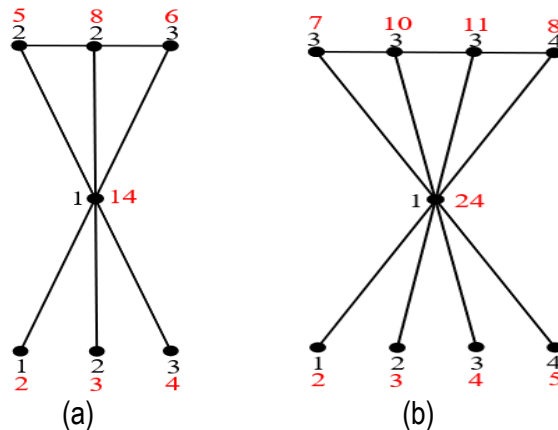
□

Teorema 1.5 Misalkan n bilangan positif dengan $n \geq 3$, nilai ketakteraturan titik jarak inklusif pada graf *mushroom* Mr_n adalah $\widehat{dis}(Mr_n) = n$

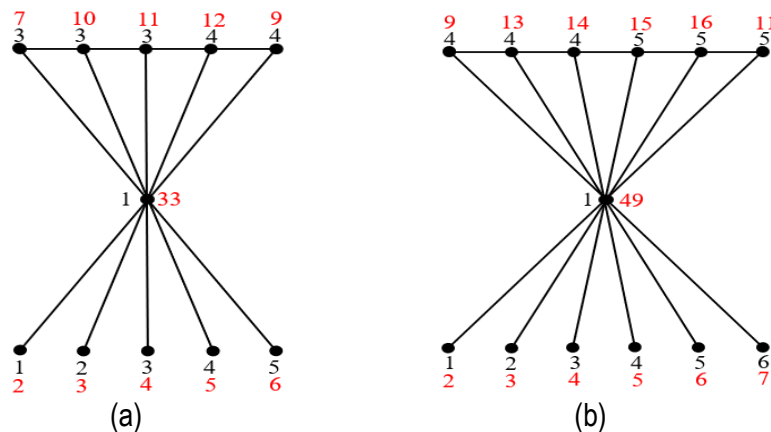
Bukti. Berdasarkan Lema 1.4 telah terbukti bahwa batas bawah nilai ketakteraturan titik jarak inklusif pada graf *mushroom* Mr_n yaitu $\widehat{dis}(Mr_n) \geq n$. Selanjutnya akan dibuktikan $\widehat{dis}(Mr_n) \leq n$, dengan cara menunjukkan bahwa graf *mushroom* Mr_n dapat diberi label $1, 2, \dots, n$, sedemikian sehingga nilai bobot titiknya berbeda semua. Pembuktian ini dibagi menjadi empat kasus yaitu :

Kasus 1. Untuk $3 \leq n \leq 6$

Pembuktian bahwa $\widehat{dis}(Mr_n) \leq n$ pada graf *mushroom* Mr_n dengan $3 \leq n \leq 6$ ditunjukkan seperti pada Gambar 2 dan 3 dengan label titik berwarna hitam dan bobot titik berwarna merah.



Gambar 2. Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf (a) Mr_3 dan (b) Mr_4



Gambar 3. Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf (a) Mr_5 dan (b) Mr_6

Kasus 2. Untuk $n \equiv 0 \pmod 3$ dan $n \geq 9$

Untuk membuktikan $\widehat{dis}(Mr_n) \leq n$ pada graf *mushroom* Mr_n dengan $n \equiv 0 \pmod 3$ dan $n \geq 7$, misalkan $f: V(Mr_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah pelabelan yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \frac{2n-3}{3} + \lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(y_i) &= i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(z) &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Berdasarkan Persamaan 1, diperoleh bobot dari setiap titik graf *mushroom* Mr_n sebagai berikut.

$$wt(x_i) = \begin{cases} \frac{4n-3}{3}, & \text{untuk } i=1 \\ 2n+i-4, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n-1 \\ 2n-3, & \text{untuk } i=n \end{cases} \quad (2)$$

$$wt(y_i) = i+1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \quad (3)$$

$$wt(z) = \frac{4n^2-3n+3}{3} \quad (4)$$

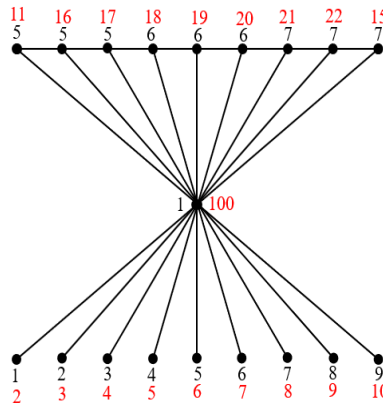
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap titik pada graf *mushroom* Mr_n memiliki bobot yang berbeda sebagai berikut

$$wt(x_i) \in \left\{ \frac{4n-3}{3}, 2n-3, 2n-2, 2n-1, 2n, 2n+1, \dots, 3n-5 \right\}$$

$$wt(y_i) \in \{2, 3, 4, \dots, n+1\}$$

$$wt(z) = \frac{4n^2-3n+3}{3}$$

Berdasarkan bobot titik tersebut, dengan mudah dapat dibuktikan bahwa $wt(x_i) < wt(y_i) < wt(z)$ untuk $dengan 1 \leq i \leq n$. Sehingga, jelas bahwa $wt(x_i) \neq wt(y_i) \neq wt(z)$, yang berarti bahwa bobot setiap titiknya berbeda. Dengan demikian, maka syarat pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) terpenuhi. Berikut contohnya



Gambar 4. Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf *Mushroom* Mr_9

Kasus 3. Untuk $n \equiv 1 \pmod{3}$ dan $n \geq 7$

Untuk membuktikan $\widehat{dis}(Mr_n) \leq n$ pada graf *mushroom* Mr_n dengan $n \equiv 1 \pmod{3}$ dan $n \geq 7$, misalkan $f: V(Mr_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah pelabelan yang didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \frac{2n-2}{3} + \lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(y_i) &= i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(z) &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Berdasarkan Persamaan 5, diperoleh bobot dari setiap titiknya sebagai berikut.

$$wt(x_i) = \begin{cases} \frac{4n-1}{3}, & \text{untuk } i=1 \\ 2n+i-3, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n-1 \\ 2n-2, & \text{untuk } i=n \end{cases} \quad (6)$$

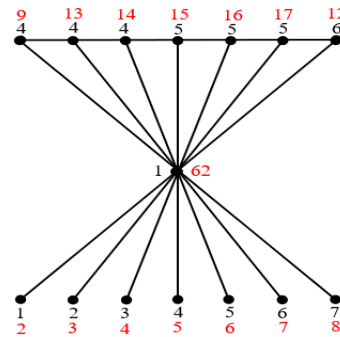
$$wt(y_i) = i+1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \quad (7)$$

$$wt(z) = \frac{4n^2 - 2n + 4}{3} \quad (8)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap titik pada graf *mushroom* Mr_n memiliki bobot yang berbeda sebagai berikut

$$\begin{aligned} wt(x_i) &\in \left\{ \frac{4n-1}{3}, 2n-2, 2n-1, 2n, 2n+1, \dots, 3n-4 \right\} \\ wt(y_i) &\in \{2, 3, 4, \dots, n+1\} \\ wt(z) &= \frac{4n^2 - 2n + 4}{3} \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot titik tersebut, dengan mudah dapat dibuktikan bahwa $wt(x_i) < wt(y_i) < wt(z)$ untuk $dengan 1 \leq i \leq n$. Sehingga, jelas bahwa $wt(x_i) \neq wt(y_i) \neq wt(z)$, yang berarti bahwa bobot setiap titiknya berbeda. Dengan demikian, maka syarat pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) terpenuhi. Berikut contohnya



Gambar 5. Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf *Mushroom* Mr_7

Kasus 4. Untuk $n \equiv 2 \pmod{3}$ dan $n \geq 8$

Untuk membuktikan $\widehat{dis}(Mr_n) \leq n$ pada graf *mushroom* Mr_n dengan $n \equiv 2 \pmod{3}$ dan $n \geq 7$, misalkan $f: V(Mr_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah pelabelan yang didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \frac{2n-1}{3} + \lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(y_i) &= i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(z) &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Berdasarkan Persamaan 9 diperoleh bobot dari setiap titiknya sebagai berikut.

$$wt(x_i) = \begin{cases} \frac{4n+1}{3}, & \text{untuk } i=1 \\ 2n+i-2, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n-1 \\ 2n-1, & \text{untuk } i=n \end{cases} \quad (10)$$

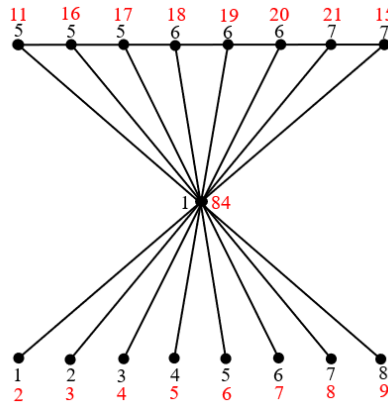
$$wt(y_i) = i+1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \quad (11)$$

$$wt(z) = \frac{4n^2 - n + 4}{3} \quad (12)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap titik pada graf *mushroom* Mr_n memiliki bobot yang berbeda sebagai berikut

$$\begin{aligned} wt(x_i) &\in \left\{ \frac{4n+1}{3}, 2n-1, 2n, 2n+1, 2n+2, \dots, 3n-3 \right\} \\ wt(y_i) &\in \{2, 3, 4, \dots, n+1\} \\ wt(z) &= \frac{4n^2 - n + 4}{3} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat dengan mudah dibuktikan bahwa bobot setiap titiknya berbeda. Sehingga dapat disimpulkan bahwa syarat pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) terpenuhi. Berikut contohnya



Gambar 6. Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf *Mushroom* Mr_8

Berdasarkan pembuktian empat kasus tersebut jelas terbukti bahwa $\widehat{dis}(Mr_n) \leq n$ dan bobot setiap titiknya berbeda. Karena batas bawah nilai ketidakteraturan titik jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) adalah $\widehat{dis}(Mr_n) \geq n$ maka dapat disimpulkan bahwa $\widehat{dis}(Mr_n) = n$

□

Nilai Ketakteraturan Titik Jarak Inklusif Gabungan Graf *Mushroom* $2Mr_n$

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai penentuan nilai ketakteraturan titik jarak inklusif pada gabungan graf *mushroom* ($2Mr_n$). Misalkan himpunan titik pada graf ini yaitu $V(2Mr_n) = \{x_i, z, y_i, a_i, c, b_i | 1 \leq i \leq n\}$. Gabungan graf *mushroom* memiliki $4n+2$ titik, dengan $2n$ titik berderajat satu, empat titik berderajat dua, $2n-4$ titik berderajat tiga, dan satu titik berderajat $2n$. Berdasarkan Teorema 1.3, diperoleh bahwa

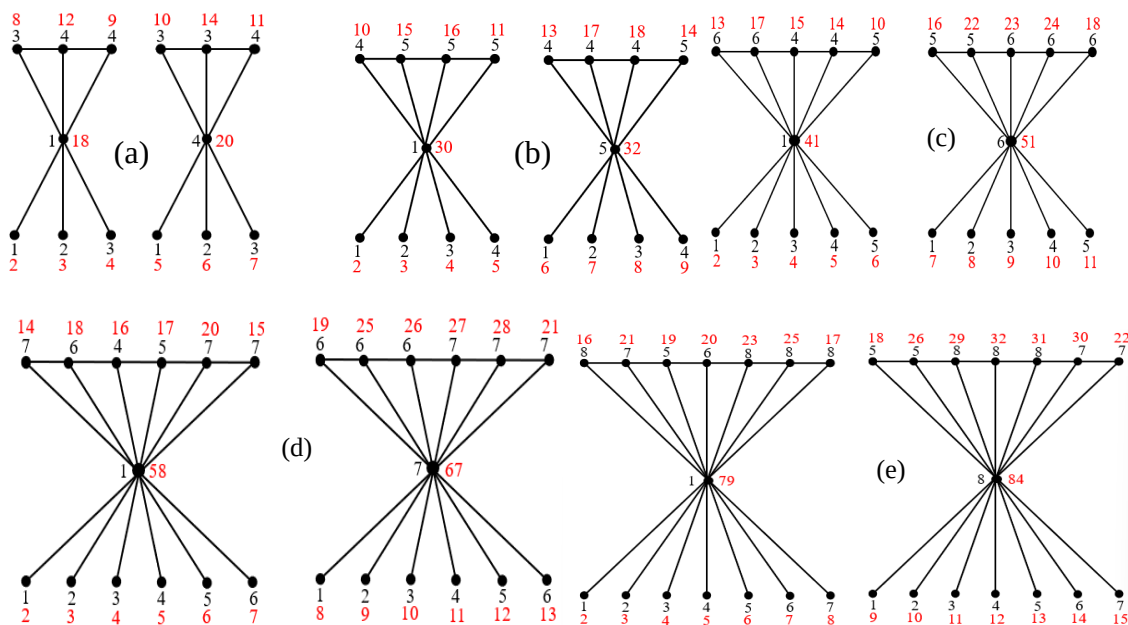
$$\begin{aligned} \widehat{dis}(2Mr_n) &\geq \max_{\delta \leq i \leq \Delta} \left\{ \left\lceil \frac{\delta + \sum_{j=\delta}^i n_j}{i+1} \right\rceil \right\} \\ \widehat{dis}(2Mr_n) &\geq \max_{1 \leq i \leq 2n} \left\{ \left\lceil \frac{\delta + \sum_{j=\delta}^i n_j}{i+1} \right\rceil \right\} \\ &\geq \max \left\{ \left\lceil \frac{1+2n}{1+1} \right\rceil, \left\lceil \frac{1+2n+4}{2+1} \right\rceil, \left\lceil \frac{1+2n+4+2n-4}{3+1} \right\rceil, \left\lceil \frac{1+2n+4+2n-4+2}{2n+1} \right\rceil \right\} \\ &\geq \max \left\{ \left\lceil \frac{1+2n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{5+2n}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{1+4n}{4} \right\rceil, \left\lceil \frac{3+4n}{2n+1} \right\rceil \right\} \\ &\geq \max \left\{ \left\lceil \frac{(6)(2n+1)(1+2n)}{(3)(2)(2)(2n+1)} \right\rceil, \left\lceil \frac{(4)(2n+1)(5+2n)}{(4)(3)(2n+1)} \right\rceil, \left\lceil \frac{(3)(2n+1)(1+4n)}{(3)(4)(2n+1)} \right\rceil, \left\lceil \frac{(4)(3)(3+4n)}{(4)(3)(2n+1)} \right\rceil \right\} \\ &\geq \max \left\{ \left\lceil \frac{24n^2+24n+6}{24n+12} \right\rceil, \left\lceil \frac{16n^2+48n+20}{24n+12} \right\rceil, \left\lceil \frac{24n^2+18n+3}{24n+12} \right\rceil, \left\lceil \frac{48n+36}{24n+12} \right\rceil \right\} \\ &\geq \left\lceil \frac{1+2n}{2} \right\rceil \end{aligned} \quad (13)$$

Dengan demikian $\widehat{dis}(2Mr_n) \geq \lceil \frac{1+2n}{2} \rceil = n+1$

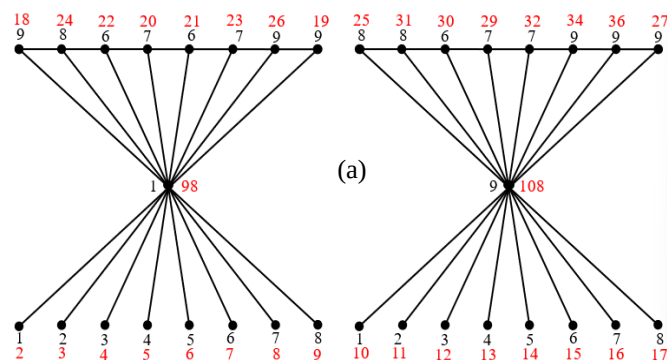
Lema 1.6 Jika $2Mr_n$ adalah gabungan graf *mushroom* dengan $3 \leq n \leq 11$, maka $\widehat{dis}(2Mr_n) = n+1$

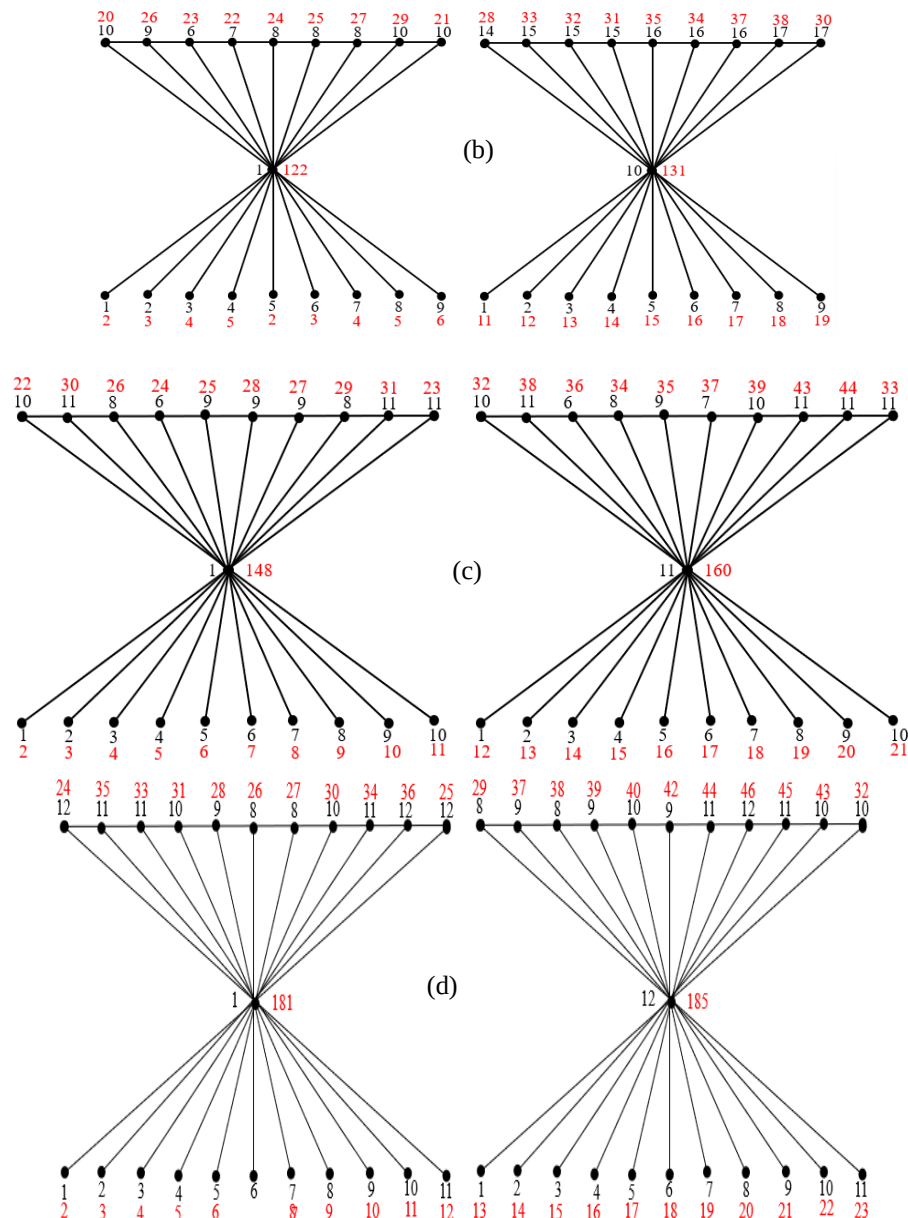
Bukti. Misalkan himpunan titik gabungan graf *mushroom* $(2Mr_n)$ adalah $V(2Mr_n) = \{x_i, z, y_i, a_i, c, b_i | 1 \leq i \leq n\}$. Gabungan graf *mushroom* $(2Mr_n)$ memiliki derajat 1, 2, 3, dan $2n$ dengan $3 \leq n \leq 11$, $\delta = 1$, dan $\Delta = 2n$. Berdasarkan Pertidaksamaan 13 diperoleh batas bawah gabungan graf *mushroom* $(2Mr_n)$ yaitu $\widehat{dis}(2Mr_n) = n+1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\widehat{dis}(2Mr_n) \leq n+1$, dengan memberi label $1, 2, \dots, n+1$ sedemikian sehingga bobot antar titiknya berbeda.

Pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif dari gabungan graf *mushroom* $(2Mr_n)$ untuk $3 \leq n \leq 11$ dengan $\widehat{dis}(2Mr_n) = n+1$ ditunjukkan seperti Gambar 7 dan 8 dengan label titik berwarna hitam dan bobot titik berwarna merah:



Gambar 7. Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf *Mushroom* (a) $2Mr_3$ (b) $2Mr_4$ (c) $2Mr_5$ (d) $2Mr_6$ (e) $2Mr_7$





Gambar 8. Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf *Mushroom* (a) $2Mr_8$ (b) $2Mr_9$ (c) $2Mr_{10}$ (d) $2Mr_{11}$

Pelabelan pada Gambar 7 dan 8 menunjukkan bahwa semua bobot titiknya berbeda. Dengan demikian, syarat pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada gabungan graf *mushroom* ($2Mr_n$) terpenuhi. Berdasarkan pembuktian tersebut jelas terbukti bahwa dengan memberikan nilai batas bawah $\widehat{dis}(2Mr_n) \leq n+1$ pada gabungan graf *mushroom* ($2Mr_n$) dengan $3 \leq n \leq 11$ memiliki bobot setiap titik yang berbeda. Karena batas bawah nilai ketidakteraturan titik jarak inklusif pada gabungan graf *mushroom* $2Mr_n$ adalah $\widehat{dis}(2Mr_n) \geq n+1$ maka dapat disimpulkan bahwa $\widehat{dis}(2Mr_n) = n+1$

□

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa nilai ketakteraturan titik jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) dengan $n \geq 3$ adalah $\widehat{dis}(Mr_n) = n$ sesuai dengan jumlah daun. Sedangkan untuk gabungan graf *mushroom* ($2Mr_n$) telah diperoleh bahwa

$\widehat{dis}(2Mr_n) \geq n+1$, untuk setiap $n \geq 3$. Namun, untuk $\widehat{dis}(2Mr_n) \leq n+1$ baru diperoleh untuk $3 \leq n \leq 11$. Dengan demikian diperoleh $\widehat{dis}(2Mr_n) = n+1$ untuk $3 \leq n \leq 11$.

REKOMENDASI

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh terkait dengan pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungan graf *mushroom* ($2Mr_n$) dengan $n \geq 3$ masih terdapat permasalahan terbuka. Pada penelitian ini didapatkan masalah terbuka pada gabungan graf *mushroom* ($2Mr_n$) yaitu apakah $\widehat{dis}(2Mr_n) \leq n+1$ untuk setiap $n \geq 12$? Selain itu, menemukan nilai ketakteraturan titik jarak inklusif pada variasi gabungan graf *mushroom* ($2Mr_n$) yang lain, seperti $2Mr_n \cup 2Mr_m$, dengan $n \neq m$.

DAFTAR PUSTAKA

- Bača, M., et. al. (2018). On Inclusive Distance Vertex Irregular Labelings. *Electronic Journal Of Graph Theory And Applications*, Vol. 6, No. 1, Pp. 61–83, Doi: 10.5614/Ejgta.2018.6.1.5.
- Bong, N.H., et. al. (2017). On Distance-Irregular Labelings Of Cycles And Wheels. *Australasian Journal of Combinatorics*, Volume 69(3), Pages 315–322.
- Bong, N.H., et. al. (2018). On inclusive and non-inclusive vertex irregular d-distance vertex labeling. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, Vol. 113, Pp. 233-247
- Chartrand, G., et. al. (2015). *Graphs & Digraphs, Sixth Edition*. New York: Taylor & Francis Group.
- Henning, M. A. dan Van Vuuren, J. H. (2022). *Graph And Network Theory*. Switzerland: Springer.
- Halikin, I., et. al. (2020). On Inclusive 1-Distance Vertex Irregularity Strength Of Firecracker, Broom, And Banana Tree. *SCITEPRESS: Science and Technology Publications*, pp. 228-232. DOI: <https://doi.org/10.5220/0008519802280232>.
- Majid, C.A., et. al. (2023). Pelabelan Jarak Tak Teratur Titik Pada Graf Persahabatan Lengkap Diperumum. *Limits: Journal Of Mathematics And Its Applications*, Vol. 20, No. 1, P. 11, Mar. 2023, Doi: 10.12962/Limits.V20i1.7917.
- Nurhakim, R. (2022). An Odd-Even Sum Labeling Of Jellyfish And Mushroom Graphs. *nprime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 2, No. 2, Pp. 87–90, Jun. 2020, Doi: 10.15408/Inprime.V2i2.14620.
- Slamin. (2017). On Distance Irregular Labelling Of Graphs. *Far East Journal Of Mathematical Sciences*, Vol. 102, No. 5, Pp. 919–932, Doi: 10.17654/Ms102050919.
- Slamin. (2019). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Malang: Dream Litera Buana.
- Susanto, F., et. al. (2021). On Inclusive Distance Vertex Irregularity Strength of Small Identical Copies of Star Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing Ltd, May 2021. Doi: 10.1088/1742-6596/1872/1/012005.
- Utami, B., et. al. (2018). Inclusive Vertex Irregular 1-Distance Labelings On Triangular Ladder Graphs . In *Aip Conference Proceedings*, American Institute Of Physics Inc., Oct. 2018. Doi: 10.1063/1.5062770.
- Wahyu, R.A., et. al. (2023). On Inclusive Distance Vertex Irregularity Strength Of Book Graphs. *Indonesian Journal Of Combinatorics*, Vol. 7, No. 2, Pp. 88–93.