Teorema: *Teori dan Riset Matematika*, *8*(1), 64–70, Maret 2023
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2023
https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/article/view/7797

PRESERVASI *CROSS-RATIO* OLEH TRANSFORMASI MÖBIUS

Iden Rainal Ihsan*
Universitas Samudra, Jln. Prof. Dr. Syarief Thayeb, Meurandeh, Langsa Lama, Kota Langsa, Aceh, Indonesia
Email: irainalihsan@unsam.ac.id*
**Corresponding Author*

ABSTRACT

The Möbius transform is a function in the extended complex plane $(\mathbb{C}_\infty)$ *which has the property of preserving the cross-ratio value of four different points in* $\mathbb{C}_\infty$*. This study is needed to enrich the discussion of geometry by expanding on algebraic studies. In this article, we discuss this property by showing that a Möbius transformation which maps* $z_i \to z_i'$; $z_i\mathbb{C}_\infty$, $(i = 1,2,3,4)$ *will imply the equality of cross-ratio values* $(z_1, z_2; z_3, z_4) = (z_1{}', z_2{}'; z_3{}', z_4{}')$*. Then it is also discussed the existence of a Möbius transformation caused by the similarity of the cross-ratio values of two different quadruples.*

Keywords: *Cross-ratio, Preservation, Möbius Transformation*

ABSTRAK

Transformasi Möbius merupakan suatu fungsi di bidang kompleks yang diperluas $(\mathbb{C}_\infty)$ yang memiliki sifat preservasi nilai cross-ratio dari empat titik berbeda di $\mathbb{C}_\infty$. Kajian ini diperlukan untuk perkaya bahasan geometri dengan memperluas pada kajian aljabar. Pada artikel ini dibahas sifat tersebut dengan menunjukkan bahwa suatu transformasi Möbius yang memetakan $z_i \to z_i'$; $z_i\mathbb{C}_\infty$, $(i = 1,2,3,4)$ akan berimpilikasi pada kesamaan nilai cross-ratio $(z_1, z_2; z_3, z_4) = (z_1{}', z_2{}'; z_3{}', z_4{}')$. Kemudian dibahas juga eksistensi suatu transformasi Möbius yang diakibatkan oleh kesamaan nilai cross-ratio dari dua quadruple yang berbeda.

Kata kunci: Cross-ratio, Preservasi, Transformasi Möbius

Dikirim: 5 Juni 2022; Diterima: 17 Maret 2023; Dipublikasikan: 31 Maret 2023
Cara sitasi: Ihsan, I. R. (2023). Preservasi cross-ratio oleh transformasi möbius. *Teorema: Teori dan Riset Matematika, 8*(1), 64-70. DOI: http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v8i1.7797

PENDAHULUAN

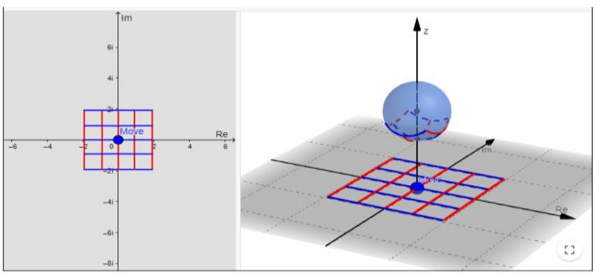
Transformasi Möbius merupakan salah satu objek matematika yang memiliki sifat-sifat yang menarik untuk dibahas, terutama dari sudut pandang geometri. Sebagaimana telah dibahas pada beberapa kajian terdahulu, transformasi Möbius memiliki sifat preservasi lingkaran dan garis (Muhammad *et al*., 2022; Niamsup, 2000; Yang, 2008). Selain sifat preservasi yang telah disebutkan, terdapat juga sifat yang terakait dengan eksistensi titik tetap (*fixed point*) pada transformasi Möbius, seperti suatu transformasi Möbius dapat dikonstruksi secara tunggal berdasarkan hasil pemetaan tiga titik berlainan di bidang kompleks yang diperluas ($\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) (Ihsan, 2015, 2016; Olsen, 2010; Zaragoza, 2019).

Pada sifat preservasi lingkaran dan garis, transformasi Möbius memetakan lingkaran menjadi lingkaran di C_∞ (Muhammad *et al*., 2022). Timbul suatu pertanyaan, transformasi Möbius yang bagaimana yang dapat memetakan suatu lingkaran tertentu ke lingkaran lain?. Pertanyan tersebut terjawab dengan memanfaatkan sifat di geometri Euclid terkait geometri lingkaran, yakni tiga titik berbeda secara tunggal menentukan suatu lingkaran (Olsen, 2010). Hal ini melatarbelakangi munculnya suatu pembahasan konsep yang disebut *cross-ratio*. Pembahasan tersebut menjadi inti dari artikel ini yang akan menitik beratkan pada suatu sifat khusus, yakni preservasi *cross-ratio* oleh transformasi Möbius.

Ketertarikan penulis dalam membahas sifat preservasi sebagaimana yang dimaksud terstimulasi dengan potensi transformasi Möbius baik secara terapan maupun konsep. Sebagai contoh, dalam proses mengidentifikasi transisi fase pemecah simetri paritas-waktu yang terjadi dalam sistem putaran linier yang digerakkan oleh torsi transfer putaran sebagai transisi antara kelas *hiperbolic* dan *loxodromic* dari transformasi Möbius, dengan titik kritis transisi yang sesuai dengan transformasi parabola menetapkan pemahaman transisi fase non-ekuilibrium sebagai transisi topologi dalam ruang konfigurasi (Galda & Vinokur, 2017). Kemudian, (Chaveroche *et al*., 2019) menunjukkan bahwa kompleksitas *Efficient Möbius Transformations* (EMT) selalu lebih rendah daripada kompleksitas algoritma yang mempertimbangkan seluruh *lattice*, *seperti Fast Möbius Transform* (FMT) untuk semua transformasi *Dempster-Shafer Theory* (DST). Kedua hal tersebut merupakan dalah satu pemanfaatan konsep transformasi Möbius pada bidang fisika dan probalitas.

Ketertarikan penulis juga muncul karena potensi pengayaan konsep matematika, khususnya pada bidang aljabar dan geometri. Kebermanfaatan akan dirasakan dalam pengajaran matematika yang mana dapat menjadi salah satu konsep yang mengaitkan aljabar dan geometri satu dengan lainnya. Aljabar dan geometri memiliki hubungan yang sangat kuat dalam hal pengajaran matematika di sekolah. Peserta didik yang memiliki kemampuan geometri yang lebih baik akan memiliki kemampuan aljabar yang baik pula, begitu pula sebaliknya (Suwito *et al*., 2016).

Artikel ini disajikan dengan susunan sistematika yakni bagian awal menyajikan pendahuluan yang merupakan unsur *novelty* dari kajian. Pembahasan mengenai transformasi Möbius, yang merupakan landasan pustaka kajian, mulai dari pendefinisian hingga pembahasan sifat-sifat dan teorema-teorema yang dapat mendukung pembahasan utama. Bagian utama dari artikel ini, yakni pembahasan sifat preservasi *cross-ratio* pada transformasi Möbius, dijabarkan pada hasil dan pembahasan. Selanjutnya, bagian kesimpulan dan rekomendasi merupakan bahasan terakhir pada artikel ini. Sebagai visualisasi sederhana, pada Gambar 1 ditampilkan representasi geometris dari transformasi Möbius di bidang kompleks.



Gambar 1. Representasi geometris transformasi Möbius
(Sumber: https://www.geogebra.org/m/GhaSJw3t)

Transformasi Möbius dan Cross-ratio

Transformasi Möbius merupakan salah satu transformasi di bidang kompleks yang diperluas $(\mathbb{C}_\infty)$. Dikedepankan oleh *Auguste Ferdinand Möbius,* transformasi ini dikenal juga dalam istilah lain, yaitu *homographic transformations, fractional linear transformations,* atau *bilinear transformations* (Ihsan, 2015; Muhammad *et al*., 2022; Olsen, 2010). Berikut adalah pendefinisan transformasi Möbius

Definisi 1. (Zaragoza, 2019)
Suatu transformasi Möbius $M: C_\infty \to C_\infty$ adalah suatu pemetaan sedemikian sehingga

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

dengan $a, b, c, d \in C$ dan $ad - bc \neq 0$

Misalkan diberikan bentuk $w = M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (dengan $a, b, c, d \in C$ dan $ad - bc \neq 0$), $M(z)$ mengasosiasikan sebuah titik tunggal (unik) $w \in \mathbb{C}_\infty$ dengan sebarang $z \in \mathbb{C}_\infty$ kecuali untuk $z = -\frac{d}{c}$ dengan $c \neq 0$ (Olsen, 2010).

Definisi 2.
Misalkan $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ yang tidak semuanya sama. (Salah satu) nilai *Cross-ratio* berdasarkan keempat titik tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$(a, b; c, d) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$$

Nilai yang dipaparkan pada definisi bukanlah satu-satunya nilai *cross-ratio*. Berdasarkan aturan perkalian, konfigurasi *Cross-ratio* pada empat titik akan ada sebanyak $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Akan tetapi apabila kita tinjau lebih terperinci akan ada beberapa kelompok nilai *Cross-ratio* yang bernilai sama. Misalkan $(a, b; c, d) = \lambda \in \mathbb{C}_\infty$, dapat ditinjau bahwa

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} = \frac{(b-d)(a-c)}{(b-c)(a-d)} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{(d-b)(c-a)}{(c-b)(d-a)} = \lambda$$

sehingga diperoleh

$$(b, a; d, c) = (c, d; a, b) = (d, c; b, a) = \lambda$$

Selanjutnya, dapat kita analisis nilai *cross-ratio* lain dari empat titik berbeda yang sebelumnya dibahas $(a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty)$. Perhatikan bahwa

$$(a, b; d, c) = \frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)} = \frac{(b-c)(a-d)}{(b-d)(a-c)} = \frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)} = \frac{(d-a)(c-b)}{(d-b)(c-a)}$$

Kemudian, dapat dicari hubungan $(a, b; d, c)$ dengan $(a, b; c, d)$ sebagai berikut

$$\frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)} = \frac{1}{\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}} = \frac{1}{\lambda}$$

Dengan cara yang sama, dari $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ dapat diperoleh enam kesamaan kelompok nilai *Cross-ratio* sebagai berikut (misal $(a, b; c, d) = \lambda \in \mathbb{C}_\infty$)

1. $(a, b; c, d) = (b, a; d, c) = (c, d; a, b) = (d, c; b, a) = \lambda$

2. $(a,b;d,c) = (b,a;c,d) = (c,d;b,a) = (d,c;a,b) = \frac{1}{\lambda}$
3. $(a,c;b,d) = (b,d;a,c) = (c,a;d,b) = (d,b;c,a) = 1 - \lambda$
4. $(a,c;d,b) = (b,d;c,a) = (c,a;b,d) = (d,b;a,c) = \frac{1}{1-\lambda}$
5. $(a,d;b,c) = (b,c;a,d) = (c,b;d,a) = (d,a;c,b) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$
6. $(a,d;c,b) = (b,c;d,a) = (c,b;a,d) = (d,a;b,c) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$

METODE PENELITIAN

Studi ini adalah kajian literatur dan studi analisis secara matematis yang sifatnya mengembangkan penelitian dan studi relevan yang sudah dikaji sebelumnya yakni sifat preservasi lingkaran dan garis pada transformasi Möbius (Muhammad *et al*., 2022) dan titik tetap transformasi Möbius (Ihsan, 2016). Pada kajian ini diperkenalkan mengenai konsep *cross-ratio* pada transformasi Möbius yang memiliki koneksi dengan konsep titik tetap dan memiliki sifat preservasi. Kajian dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Melakukan studi literatur (*literature review*) mengenai transformasi Möbius di $\mathbb{C}_\infty$;
2. Mendefinisikan *cross-ratio* pada transformasi Möbius;
3. Membuktikan sifat preservasi *cross-ratio* pada transformasi Möbius.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dipaparkan hasil kajian mengenai sifat preservasi *cross-ratio* oleh transformasi Möbius. Pembahasan dilakukan dengan menyatakan sifat preservasi dalam bentuk teorema yang kemudian dibuktikan secara formal. Terdapat dua teorema, yang pertama menyatakan implikasi dari transformasi Möbius terhadap kesamaan nilai *cross-ratio* dari empat titik berbeda di $\mathbb{C}_\infty$dengan nilai *cross-ratio* dari masing-masing hasil pemetaan keempat titik yang dimaksud. Teorema dan pembahasan yang kedua, sebagai suplemen, dibahas juga mengenai kesamaan nilai *cross-ratio* dari dua quadruple bilangan-bilangan di $\mathbb{C}_\infty$ yang berbeda satu dengan lainnya berimplikasi pada eksistensi suatu transformasi Möbius yang memetakan pasangan quadruple yang diberikan. Secara lebih teoritis dan jelas, disajikan pembahasan teorema-teorema tersebut sebagi berikut:

Teorema 1.
Misalkan M merupakan transformasi Möbius. Jika z_1, z_2, z_3, z_4 empat titik berbeda di $\mathbb{C}_\infty$, maka berlaku $(M(z_1), M(z_2); M(z_3), M(z_4)) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$.

Bukti:
Misalkan $M = \frac{az+b}{cz+d}$ dengan $a,b,c,d \in \mathbb{C}_\infty$ dengan $ad - bc \neq 0$. Untuk $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ berturut-turut diperoleh $M(z_1) = \frac{az_1+b}{cz_1+d}$; $M(z_2) = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$; $M(z_3) = \frac{az_3+b}{cz_3+d}$; dan $M(z_4) = \frac{az_4+b}{cz_4+d}$. *Cross-ratio* yang melibat keempat titik tersebut, salah satunya adalah $(M(z_1), M(z_2); M(z_3), M(z_4))$ yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$(M(z_1), M(z_2); M(z_3), M(z_4)) = \frac{\left[\frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d}\right]\left[\frac{az_4+b}{cz_4+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}\right]}{\left[\frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}\right]\left[\frac{az_4+b}{cz_4+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{(az_3+b)(cz_1+d) - (az_1+b)(cz_3+d)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}\right]\left[\frac{(az_4+b)(cz_2+d) - (az_2+b)(cz_4+d)}{(cz_4+d)(cz_1+d)}\right]}{\left[\frac{(az_3+b)(cz_2+d) - (az_2+b)(cz_3+d)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}\right]\left[\frac{(az_4+b)(cz_1+d) - (az_1+b)(cz_4+d)}{(cz_4+d)(cz_1+d)}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{(az_3cz_1+adz_3+bcz_1+bd)-(az_1cz_3+adz_1+bcz_3+bd)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}\right]\left[\frac{(az_4cz_2+adz_4+bcz_2+bd)-(az_2cz_4+adz_2+bcz_4+bd)}{(cz_4+d)(cz_2+d)}\right]}{\left[\frac{(az_3cz_1+adz_3+bcz_1+bd)-(az_1cz_3+adz_1+bcz_3+bd)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}\right]\left[\frac{(az_4cz_1+adz_4+bcz_1+bd)-(az_1cz_4+adz_1+bcz_4+bd)}{(cz_4+d)(cz_1+d)}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{(adz_3+bcz_1)-(adz_1+bcz_3)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}\right]\left[\frac{(adz_4+bcz_2)-(adz_2+bcz_4)}{(cz_4+d)(cz_2+d)}\right]}{\left[\frac{(adz_3+bcz_2)-(adz_2+bcz_3)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}\right]\left[\frac{(adz_4+bcz_1)-(adz_1+bcz_4)}{(cz_4+d)(cz_1+d)}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{(ad-bc)(z_3-z_1)(ad-bc)(z_4-z_2)}{(cz_3+d)(cz_1+d)(cz_4+d)(cz_2+d)}\right]}{\left[\frac{(ad-bc)(z_3-z_2)(ad-bc)(z_4-z_1)}{(cz_3+d)(cz_2+d)(cz_4+d)(cz_1+d)}\right]}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z_3-z_1)(ad-bc)(z_4-z_2)}{(ad-bc)(z_3-z_2)(ad-bc)(z_4-z_1)}$$

$$= \frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)}$$

$$= (z_1, z_2; z_3, z_4) \blacksquare$$

Berdasarkan pembuktian teorema tersebut, dapat dikatakan nilai *cross-ratio* dari sebarang empat titik berbeda di $\mathbb{C}_\infty$ akan sama dengan nilai *cross-ratio* setiap hasil pemetaan transformasi Möbius terhadap titik-titik tersebut (dengan urutan yang bersesuaian).

Pada bagian ini kan dipaparkan juga pembahasan mengenai kesamaan nilai *cross-ratio* dari dua quadruple yang berbeda yang berimplikasi pada eksistensi uatu transformasi Möbius yang memetakan titik-titik pada satu *quadruple* ke *quadruple* yang lain (secara berurutan). Secara sederhana, misal $(a, b; c, d) = (a', b'; c', d')$ dengan $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}_\infty$ (a, b, c, d berbeda satu dengan yang lain, begitu pula a', b', c', d'), akan ada suatu transformasi Möbius M sedemikian sehingga $M(a) = a'; M(b) = b'; M(c) = c'$ dan $M(d) = d'$. Secara formal, konsep ini dituliskan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 2.
Misalkan $z, a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ dengan z, a, b, c berbeda satu dengan yang lain, kemudian $z', a', b', c' \in \mathbb{C}_\infty$ dengan z', a', b', c' berbeda satu dengan yang lain.
Jika $(z, a; b, c) = (z', a'; b', c')$, maka terdapat suatu transformasi Möbius M, sehingga $M(z) = z'$; $M(a) = a'; M(b) = b'$; dan $M(c) = c'$

Bukti:
Diketahui

$$(z, a; b, c) = (z', a'; b', c')$$

dengan demikian, dapat diperoleh persamaan (beserta penjabaran) sebagai berikut:

$$\frac{(z-b)(a-c)}{(z-c)(a-b)} = \frac{(z'-b')(a'-c')}{(z'-c')(a'-b')}$$

$$\frac{(z-b)(a-c)(a'-b')(z'-c')}{(z-c)(a-b)(a'-c')} = (z'-b')$$
$$\frac{(z-b)(a-c)(a'-b')(z'-c')}{(z-c)(a-b)(a'-c')} = (z'-b')$$

Misalkan $(a-c)(a'-b')(z'-c') = \theta$ dan $(a-b)(a'-c') = \delta$. Persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{(z-b)\theta}{(z-c)\delta} = (z'-b')$$
$$\frac{(z-b)\theta}{(z-c)\delta} + b' = z'$$
$$\frac{(z-b)\theta + b'\delta(z-c)}{(z-c)\delta} = z'$$
$$\frac{(\theta z - \theta b) + (b'\delta z - b'\delta c)}{\delta z - \delta c} = z'$$
$$\frac{(\theta + b'\delta)z - (\theta b + b'\delta c)}{\delta z - \delta c} = z'$$

Untuk menunjukkan persamaan di atas merupakan suatu bentuk transformasi Möbius perlu diselidiki keberlakuan $(\theta + b'\delta)(-\delta c) - (-(\theta b + b'\delta c)\delta) \neq 0$ (sesuai definisi 1). Perhatikan ruas kanan ketaksamaan tersebut

$$\begin{aligned}(\theta + b'\delta)(-\delta c) - (-(\theta b + b'\delta c)\delta) &= (-(\theta c + b'\delta c) - [-(\theta b + b'\delta c)])\delta \\ &= (-\theta c - b'\delta c + \theta b + b'\delta c)\delta \\ &= (b-c)\theta\delta\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $b - c \neq 0$, karena berdasarkan pemisalan z, a, b, c merupakan anggota $\mathbb{C}_\infty$ yang berbeda satu dengan yang lainnya. Argumentasi yang sama juga dapat digunakan untuk mengklaim bahwa $a - c \neq 0$ dan $a - b \neq 0$. Kemudian, pemisalan z', a', b', c' merupakan anggota $\mathbb{C}_\infty$ yang juga berbeda satu dengan lainnya, dapaty dipergunakan sebagai argumentasi untuk klaim nilai $a' - b'$; $z' - c'$; dan $a' - c'$ semuanya tidak sama dengan nol. Dengan demikian bisa kita peroleh implikasi $\theta \neq 0$ dan $\delta \neq 0$. Dapat kita simpulkan $(b-c)\theta\delta$, yang mana berimplikasi juga pada $\frac{(\theta+b'\delta)z-(\theta b+b'\delta c)}{\delta z-\delta c} = z'$ merupakan bentuk transformasi Möbius (dalam hal ini $M(z) = z'$). Dengan konfigurasi nilai *cross-ratio* yang lain, dapat dikonstruksi dan ditunjukkan $M(a) = a'$; $M(b) = b'$; dan $M(c) = c'$. Jadi terbukti kesamaan $(z, a; b, c) = (z', a'; b', c')$ berimplikasi pada eksistensi suatu tranformasi Möbius M sedemikian sehingga

$$M(z) = z';\ M(a) = a'; M(b) = b'; dan\ M(c) = c' \blacksquare$$

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada bagian sebelumnya, terdapat suatu simpulan mengenai sifat preservasi *cross-ratio* oleh transformasi Möbius. berdasarkan teorema 1, dapat disimpulkan bahwa transformasi Möbius memiliki sifat preservasi nilai *cross-ratio.* Telah dibuktikan bahwa nilai *cross-ratio* dari empat bilangan (titik) berbeda di $\mathbb{C}_\infty$ sama dengan nilai *cross-ratio* dari hasil pemetaan transformasi Möbius empat bilangan tersebut dalam urutan yang bersesuaian. Kemudian dari pembuktian teorema 2, dapat disimpulkan bahwa jika ada dua quadruple bilangan (titik) berbeda di $\mathbb{C}_\infty$ dengan nilai yang sama, berimplikasi pada eksistensi suatu transformasi Möbius yang memetakan titik-titik pada quadruple satu ke duadruple lainnya dengan urutan yang bersesuaian.

REKOMENDASI

Terdapat beberapa hal yang direkomendasikan untuk kajian atau kajian lanjutan. Pertama, sangat direkomendasikan untuk dilakukan suatu kajian mengenai sifat-sifat transformasi Möbius dari sudut pandang aljabar. Secara lebih khusus, sebagai rekomendasi yang kedua, adalah pengkajian tentang struktur grup transformasi Möbius.

UCAPAN TERIMAKASIH

Pada kesempatan ini dihaturkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu rangkaian kajian mengenai transformasi Möbius oleh penulis. Khusus diucapkan banyak terima kasih kepada tim dosen program studi pendidikan matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Samudra atas segala masukan dan diskusinya.

DAFTAR PUSTAKA

Chaveroche, M., Davoine, F., & Cherfaoui, V. (2019). Efficient möbius transformations and their applications to d-s theory. *13th International Conference on Scalable Uncertainty Management (SUM 2019)*, 390–403. https://doi.org/10.1007/978-3-030-35514-2_29

Galda, A., & Vinokur, V. M. (2017). Linear dynamics of classical spin as möbius transformation. *Scientific Reports*, *7*(1). https://doi.org/10.1038/s41598-017-01326-x

Ihsan, I. R. (2015). *Klasifikasi geometris dari transformasi möbius*. Institut Teknologi Bandung.

Ihsan, I. R. (2016). Titik tetap(fixed point) padatransformasi möbius. *Euclid*, *3*(1), 485–490.

Muhammad, G. M., Ihsan, I. R., & Priyanda, R. (2022). Sifat preservasi lingkaran dan garis pada transformasi möbius. *Jambura Journal of Mathematics*, *4*(2), 200–208.

Niamsup, P. (2000). A characterization of möbius transformations. *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, *24*(10). https://doi.org/10.1155/S0161171200010255

Olsen, J. (2010). *The geometry of möbius transformations*. University of Rochester.

Suwito, A., Yuwono, I., Parta, I. N., & Irawati, S. (2016). The linkage of problem solving between geometry and algebra: what is their correlation? *International Conference on Mathematics, Science, and Education*, *2016*(Icmse).

Yang, S. (2008). A characterization of Möbius transformations. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, *84*(2), 35–38.

Zaragoza, L. G.-M. (2019). *Möbius transformations*. University of Seville.