RUANG TOPOLOGI YANG MANA YANG HOMEOMORFIK DENGAN RUANG FAKTOR

By Muhammad Irfan

Teorema: Teori dan Riset Matematika Vol xx, No. xx, September xxx, pp. x-xx
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2019

https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/index

RUANG TOPOLOGI YANG MANA YANG HOMEOMORFIK DENGAN RUANG FAKTOR $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^{1}$

Denik Agustito[1], Irham Taufiq[2], Muhammad Irfan[3]
[1,2,3] Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Jl. Batikan UH 3/1043 Tuntungan Umbulharjo, Indonesia
Email: muhammad.irfan@ustjogja.ac.id

ABSTRACT

The action of a group G on a non-empty set X is a mapping $G \times X \longrightarrow X$ defined by $(g, x) \mapsto gx$ and satisfying the properties $ex = x$ and $g(hx) = (gh)x$ for all $x \in X$ and $g, h \in G$ where e is the identity element in group G and this is equivalent to the existence of a group homomorphism $\rho: G \longrightarrow \mathrm{Bij}(X)$ defined by $\rho(g) = \rho_g \in \mathrm{Bij}(X)$. Then the action of a group G in a topological space X_{Top} obtains a homeomorphic topological space with a space consisting of all orbits in the X_{Top} topological space, namely $G/X_{\mathbf{Top}} = \{[x] | x \in X_{\mathbf{Top}}\}$. If group G is a unit circle group i.e. S^1 acting on a topological space S^{2n+1} then the factor space will be homoemorphic on an n-dimensional complex projective space i.e. CP^n.

Keywords: Action, Group, Homeomorphic, Complex, Projective, Topology

ABSTRAK

Aksi dari sebuah grup G pada sebuah himpunan tak-kosong X adalah sebuah pemetaan $G \times X \longrightarrow X$ yang didefinisikan dengan $(g, x) \mapsto gx$ dan memnuhi sifat $ex = x$ dan $g(hx) = (gh)x$ untuk semua $x \in X$ dan $g, h \in G$ dimana e adalah elemen identitas pada grup G dan ini ekuivalen dengan adanya suatu homomorfisma grup $\rho: G \longrightarrow \mathrm{Bij}(X)$ yang didefinisikan dengan $\rho(g) = \rho_g \in \mathrm{Bij}(X)$. Kemudian aksi suatu grup G pada suatu ruang topologi $X_{\mathbf{Top}}$ memperoleh sebuah ruang topologi yang homeomorfik dengan ruang yang terdiri dari semua orbit-orbit pada ruang topologi $X_{\mathbf{Top}}$ yaitu $G/X_{\mathbf{Top}} = \{[x] | x \in X_{\mathbf{Top}}\}$. Jika grup G adalah grup lingkaran satuan yaitu $\mathbb{S}^1$ yang beraksi pada suatu ruang topologi $\mathbb{S}^{2n+1}$ maka ruang faktornya akan homoemorfik pada ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}P^n$.

Kata Kunci: Aksi, Grup, Homeomorfik, Kompleks, Proyektif, Topologi.

Cara sitasi: Amam, A. & Noto, M. S. (2019). Judul Ditulis dalam Bahasa Indonesia. *Teorema: Teori dan Riset Matematika, x* (x), xx-xx.

Teorema: Teori dan Riset Matematika Vol xx, No. xx, September xxx, pp. x-xx
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237

https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/index

PENDAHULUAN

Jika diberikan sebuah grup G dan sebuah himpunan tak-kosong X maka sebuah aksi dari grup G pada himpunan X adalah pemetaan $G \times X \longrightarrow X$ yang didefinisikan dengan $(g,x) \longmapsto gx$ dan memnuhi sifat $ex = x$ dan $g(hx) = (gh)x$ untuk semua $x \in X$ dan $g,h \in G$ dimana e adalah elemen identitas pada grup G. Gagasan mengenai aksi dari grup G pada himpunan X akan ekuivalen dengan adanya suatu homomorfisma grup $\rho: G \longrightarrow \mathrm{Bij}(X)$ yang didefinisikan dengan $\rho(g) = \rho_g \in \mathrm{Bij}(X)$ dimana $\mathrm{Bij}(X)$ adalah grup dari semua pemetaan bijektif dari himpunan X kedirinya sendiri bersama dengan operasi komposisi fungsi dan $\rho_g(x) = gx$ untuk semua $x \in X$. Untuk gagasan mengenai relasi ekuivalen, kelas-kelas ekuivelan dan ruang faktornya juga sudah familiar dan kemudian pada himpunan X didefinisikan sebuah relasi $\sim$ yaitu sebagai berikut:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\equiv} \exists g \in G \ni \rho_g(x) = y$$

untuk x dan y di X. Jelas relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalen dan kelas ekuivalensi yang memuat x adalah $[x] = \{y \in X | x \sim y\} = \{y \in X | \rho_g(x) = y \text{ untuk suatu } g \in G\} = \{gx | g \in G\}$ (katakan $[x]$ sebagai orbit dari *x*). Himpunan faktor yang terdiri dari semua orbit-orbit pada himpunan X akan dinotasikan dengan $X/G = \{[x] | x \in X\}$.

Dari gagasan mengenai aksi suatu grup G pada suatu himpunan tak-kosong X akan meluas ke dalam aksi suatu grup G pada suatu ruang topologi X_{Top} sehingga kita memperoleh sebuah ruang topologi yang homeomorfik dengan ruang yang terdiri dari semua orbit-orbit pada ruang topologi X_{Top} dan katakan ruang topologi tersebut dengan ruang faktor dan dinotasikan ruang faktor tersebut dengan $X_{\mathrm{Top}}/G = \{[x] | x \in X_{\mathrm{Top}}\}$. Dalam kajian topologi jelas bahwa lingkaran satuan $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ adalah sebuah grup terhadap operasi perkalian. Pada grup $\mathbb{S}^1$ akan didefinisikan sebuah aksi pada sebuah ruang topologi yaitu sphere berdimensi $2n+1$ yaitu sebagai berikut:

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\}$$

Pertanyaannya adalah, adakah sebuah ruang topologi yang cukup bagus yang homeomorfik dengan ruang faktor $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$?. Jika ada sebuah ruang topologi yang homeomorfik dengan ruang faktor $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, maka akan dikaji selanjutnya mengenai keberadaan ruang-ruang topologi yang homeomorfik dengan $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^1$. Menariknya dari ruang faktor $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^1$ adalah untuk melihat sifat-sifat topologis dari sphere berdimensi-*n* yang beraksi pada grup lingkaran satuan $\mathbb{S}^1$.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan sebuah aksi dari grup lingkaran satuan $\mathbb{S}^1$ pada sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$.
2. Mengkonstruksi sebuah pemetaan kontinu $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$.
3. Dengan gagasan mengenai konstruksi ruang faktor, diperoleh sebuah pemetaan kontinu $f: \mathbb{C}\mathrm{P}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ dan dibuktikan bahwa pemetaan f adalah homeomoerfisma.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Gagasan mengenai pemetaan kontinu, pemetaan terbuka dan homeomorfisma dapat dijumpai pada [2]. Diberikan sebuah grup G dan sebuah ruang topologi X dan himpun semua homeomorfisma pada X dan notasikan himpunan tersebut dengan $\mathrm{Homeo}(X)$. Himpunan $\mathrm{Homeo}(X)$ membentuk semua grup terhadap operasi komposisi fungsi, dan dari himpunan $\mathrm{Homeo}(X)$ akan didefinisikan sebuah aksi dari grup G pada ruang topologi X sebagai suatu homomorfisma grup

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

Jika $G = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ adalah sebuah grup terhadap operasi perkalian dan diberikan sebuah ruang topologi yaitu sphere berdimensi $2n+1$ yaitu sebagai berikut:

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\}$$

maka dapat dibentuk sebuah pengaitan dari $\mathbb{S}^1$ pada sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$ yaitu $\rho: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^{2n+1})$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho_z: \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$$

dengan $\rho_z\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big) = (z.z_1, \dots, z.z_{n+1})$ untuk setiap $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}$ dan pengaitan tersebut adalah *well-defined*.

Sifat 1.1. Pemetaan $\rho: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^{2n+1})$ adalah homomorfisma grup.
Bukti:
Ambil sembarang $y, z \in \mathbb{S}^1$.
Jelas $\rho_{yz}: \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^{2n+1})$.
Ambil sembarang $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}$.
Jelas
$$\begin{aligned}\rho_{yz}\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big) &= \big((yz)z_1, \dots, (yz)z_{n+1}\big) = \big(y(zz_1), \dots, y(zz_{n+1})\big)\\ &= \rho_y\big((zz_1, \dots, zz_{n+1})\big) = \rho_y\left(\rho_z\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big)\right)\\ &= (\rho_y\rho_z)\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big).\end{aligned}$$
Jelas $\rho_{yz} = \rho_y\rho_z$ atau dengan kata lain $\rho(yz) = \rho_y\rho_z$ untuk setiap $y, z \in \mathbb{S}^1$.
Jadi pemetaan $\rho: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^{2n+1})$ adalah homomorfisma grup.

Kemudian didefinisikan sebuah relasi $\sim$ pada X yaitu sebagai berikut:

$$x \sim y \overset{\mathrm{def}}{=} \exists g \in G \ni \rho_g(x) = y$$

untuk suatu $\rho_g \in \mathrm{Homeo}(X)$.

Teorema 1.2. Relasi $\sim$ pada X adalah relasi ekuivalen.
Bukti:
(i). Ambil sembarang $x \in X$.
Pilih $e \in G$ sebagai elemen identitasnya.

Definisikan $\rho_g = 1_X \in \text{Homeo}(X)$.
Jelas $\rho_g(x) = 1_X(x) = x$.
Jadi relasi $\sim$ bersifat refleksif.

(ii). Ambil sembarang $x, y \in X$ yang sifatnya $x \sim y$.
Karena $x \sim y$, jelas $\exists g \in G \ni \rho_g(x) = y$ untuk suatu $\rho_g \in \text{Homeo}(X)$.
Karena $\rho_g \in \text{Homeo}(X)$, jelas $\rho_g^{-1} \in \text{Homeo}(X)$.
Karena $\rho_g(x) = y$, jelas $y = \rho_g^{-1}(x)$.
Jelas $y \sim x$.
Jadi relasi $\sim$ bersifat simetrik.

(iii). Ambil sembarang $x, y, z \in X$ yang sifatnya $x \sim y$ dan $y \sim z$.
Jelas $\exists g_1, g_2 \in G \ni \rho_{g_1}(x) = y$ dan $\rho_{g_2}(y) = z$ untuk suatu $\rho_{g_1}, \rho_{g_2} \in \text{Homeo}(X)$.
Karena $\rho_{g_1}, \rho_{g_2} \in \text{Homeo}(X)$, jelas $\rho_{g_2}\rho_{g_1} \in \text{Homeo}(X)$.
Jelas $\rho_{g_2}\rho_{g_1}(x) = z$.
Jelas $x \sim z$.
Jadi relasi $\sim$ bersifat transitif.

Kelas ekuivalensi yang memuat $x \in X$ adalah $[x] = \{y \in X | y \sim x\}$ dan himpunan faktornya akan dinotasikan dengan $X/G = \{[x] | x \in G\}$. Dari contoh sebelumnya diperoleh sebuah himpunan faktor yaitu sebagai berikut:

$$\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 = \{[(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1} | (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}\}$$

Lemma 1.3. Jika diberikan sebuah pemetaan kontinu $f: X \longrightarrow X$ dan Y subruang dari X yang sifatnya $f(X) \subseteq Y$ maka pemetaan $g: X \longrightarrow Y$ yang didefinisikan dengan $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in X$ adalah kontinu.

Bukti:
Ambil sembarang $x \in X$ dan sembarang lingkungan buka U dalam Y dari $g(x)$.
Karena U buka dalam Y, jelas $U = V \cap Y$ untuk suatu himpunan buka V dalam X.
Karena $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in X$, jelas $f(x) = g(x) \in U = V \cap Y$.
Jelas $x \in f^{-1}(U) = f^{-1}(V \cap Y) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(V)$.
Karena f kontinu dan V buka dalam X, jelas $f^{-1}(V)$ juga buka dalam X.
Jelas $x \in f^{-1}(V)$.
Pilih $U_x = f^{-1}(V)$ adalah lingkungan buka dari x.
Jelas
$$\begin{aligned} g(U_x) = g(f^{-1}(V)) &= \{g(a) | a \in f^{-1}(V)\} \\ &= \{g(a) | f(a) \in V\} \\ &= \{g(a) | g(a) \in V\} \\ &= V \end{aligned}$$
Jadi $g: X \longrightarrow Y$ adalah pemetaan kontinu.

Teorema 1.4. Pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$r((z_1, \dots, z_n)) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$$

adalah kontinu dengan $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$.
Bukti:
Jelas pemetaan identitas $1_{\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}}: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ adalah kontinu dan $\mathbb{S}^{2n+1}$ adalah subruang dari $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Karena $\frac{1}{|z|} \in \mathbb{C}$ adalah skalar, jelas pemetaan $f: \frac{1}{|z|} 1_{\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}}: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ yang didefinisikan dengan $f\big((z_1, \dots, z_n)\big) = \frac{1}{|z|} 1_{\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}}\big((z_1, \dots, z_n)\big) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$ juga kontinu.
Jelas $f(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \subseteq \mathbb{S}^{2n+1}$.
Bentuk pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ yang didefinisikan dengan $r\big((z_1, \dots, z_n)\big) = f\big((z_1, \dots, z_n)\big) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$.
Berdasarkan Lemma 1.3, jelas pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ kontinu.
Jadi pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ adalah kontinu.

Kemudian akan diperkenalkan sebuah ruang topologi yang berisikan semua garis-garis yang melalui titik pusat koordinat dari ruang Euclidean kompleks $\mathbb{C}^{n+1}$ yaitu ruang proyektif kompleks dan dinotasikan dengan $\mathbb{C}P^n$. Ruang Proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ ini telah diketahui memiliki struktur manifold yaitu manifold kompleks.

Teorema 1.5. Pengaitan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f([z_1 : \dots : z_{n+1}]) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$$

adalah bijektif.
Bukti:

(i). Dibuktikan pengaitan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah *well-defined*.
Ambil sembarang $[y_1 : \dots : y_{n+1}], [z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$ yang sifatnya $[y_1 : \dots : y_{n+1}] = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$.
Jelas $(y_1, \dots, y_{n+1}) = k(x_1, \dots, x_{n+1})$ untuk suatu $k \in \mathbb{C}$ dengan $k \neq 0$.
Jelas $y_i = kx_i$ untuk suatu $k \in \mathbb{C}$ dengan $k \neq 0$ dengan $i = 1, \dots, n+1$.
Tulis $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ dan $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$.
Jelas $\left(\frac{y_1}{|y|}, \dots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right) = \left(\frac{kz_1}{|k||z|}, \dots, \frac{kz_{n+1}}{|k||z|}\right) = \frac{k}{|k|}\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$.
Tulis $\lambda = \frac{k}{|k|} \in \mathbb{S}^1$.
Jelas $\left(\frac{y_1}{|y|}, \dots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right) = \lambda\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$.
Jelas $\left[\left(\frac{y_1}{|y|}, \dots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1} = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$.
Jelas $f([y_1 : \dots : y_{n+1}]) = f([z_1 : \dots : z_{n+1}])$.
Jadi pengaitan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah *well-defined*.

(ii). Ambil sembarang $[y_1 : \dots : y_{n+1}], [z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$ yang sifatnya $f([y_1 : \dots : y_{n+1}]) = f([z_1 : \dots : z_{n+1}])$.
Jelas $\left[\left(\frac{y_1}{|y|}, \dots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1} = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$.
Jelas $\left(\frac{y_1}{|y|}, \dots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right) = \lambda\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

Jelas $\frac{1}{|y|}(y_1,\dots,y_{n+1}) = \frac{\lambda}{|z|}(z_1,\dots,z_{n+1})$.
Jelas $(y_1,\dots,y_{n+1}) = \frac{\lambda|y|}{|z|}(z_1,\dots,z_{n+1})$.
Jelas $[y_1:\dots:y_{n+1}] = [z_1:\dots:z_{n+1}]$.
Jadi pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah injektif.

(iii). Ambil sembarang $[a]_{\mathbb{S}^1} \in \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.
Tulis $[a]_{\mathbb{S}^1} = [(z_1,\dots,z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}$.
Pilih $a = (z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Karena $a = (z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}$, Jelas $r(a) = r((z_1,\dots,z_{n+1})) = \left(\frac{z_1}{|z|},\dots,\frac{z_{n+1}}{|z|}\right) = (z_1,\dots,z_{n+1})$.
Pilih $b = [z_1,\dots,z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.
Jelas $f(b) = f([z_1,\dots,z_{n+1}]) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|},\dots,\frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1} = [(z_1,\dots,z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1=[a]_{\mathbb{S}^1}}$.
Jadi pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah adalah surjektif.

Sekarang pandang diagram berikut ini:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^{2n+1} \arrow[d, "q"'] \\
\mathbb{C}P^n \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

[Diagram 1]

Sembarang $z = (z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ berlaku $r((z_1,\dots,z_{n+1})) = \left(\frac{z_1}{|z|},\dots,\frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$ dan $\pi((z_1,\dots,z_{n+1})) = [z_1:\dots:z_{n+1}]$. Jelas $q\left(r((z_1,\dots,z_{n+1}))\right) = q\left(\left(\frac{z_1}{|z|},\dots,\frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|},\dots,\frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$ dan $f\left(\pi((z_1,\dots,z_{n+1}))\right) = f([z_1:\dots:z_{n+1}]) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|},\dots,\frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$. Jelas $q \circ r = f \circ \pi$; dengan kata lain Diagram 1 tersebut adalah komutatif. Jelas bahwa pemetaan proyeksi π, q adalah surjektif kontinu dan terbuka dan pemetaan r juga kontinu.

Teorema 1.6. Pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah kontinu.
Bukti:
Ambil sembarang himpunan buka *U* dalam $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.
Karena q kontinu, jelas $q^{-1}(U)$ adalah buka dalam $\mathbb{S}^{2n+1}$.
Karena r kontinu, jelas $r^{-1}\left(q^{-1}(U)\right)$ adalah buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Jelas $r^{-1}\left(q^{-1}(U)\right) = (q \circ r)^{-1}(U)$ buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Karena Diagram 1 di atas adalah komutatif, jelas $q \circ r = f \circ \pi$.
Karena $q \circ r = f \circ \pi$ dan $(q \circ r)^{-1}(U)$, jelas $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Jelas $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$ buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Karena π adalah pemetaan terbuka, jelas $\pi\left(\pi^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)\right) = f^{-1}(U)$ buka dalam $\mathbb{C}P^n$.
Jadi diperoleh jika *U* adalah sembarang himpunan buka dalam $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ maka $f^{-1}(U)$ adalah juga himpunan buka dalam $\mathbb{C}P^n$.
Jadi pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah kontinu.

Teorema 1.7. Pemetaan $f^{-1}: \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f^{-1}([(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}) = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$$

adalah invers dari pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.
Bukti:
(i). Ambil sembarang $[z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.

Jelas
$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)([z_1 : \dots : z_{n+1}]) &= f^{-1}\left(f([z_1 : \dots : z_{n+1}])\right)\\ &= f^{-1}\left(\left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}\right)\\ &= [z_1 : \dots : z_{n+1}]\end{aligned}$$

Jadi $f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{C}P^n}$.

(ii). Ambil sembarang $[(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}$.

Jelas
$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})([(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}) &= f\left(f^{-1}([(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1})\right)\\ &= f([z_1 : \dots : z_{n+1}])\\ &= [(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}\end{aligned}$$

Jadi $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1}$.

Dari (i) dan (ii), jelas pemetaan $f^{-1}: \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah invers dari pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.

Lemma 1.8. Jika diberikan fungsi f adalah kontinu dan terbuka, fungsi h adalah kontinu, maka setiap fungsi g yang memenuhi sifat $h = gf$ adalah kontinu.
Bukti:
Untuk setiap fungsi g, tulis $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ dan $h: X \longrightarrow Z$ yang sifatnya $h = gf$ dengan f adalah kontinu dan terbuka dan g kontinu.
Ambil sembarang himpunan buka *U* dalam Z.
Karena g kontinu, jelas $h^{-1}(U)$ buka dalam *X*.
Karena f adalah terbuka, jelas $f\left(h^{-1}(U)\right)$ buka dalam Y.

Teorema: Teori dan Riset Matematika Vol xx, No. xx, September xxx, pp. x-xx
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2019

https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/index

Karena $h = gf$, jelas $g\left(f\left(h^{-1}(U)\right)\right) = (gf)\left(h^{-1}(U)\right) = h\left(h^{-1}(U)\right) \subseteq U$.
Jadi fungsi g adalah kontinu.

Lemma 1.9. Komposisi dari dua buah fungsi kontinu dan terbuka adalah kontinu dan terbuka.
Bukti: Silakan lihat pada Dugundji.

Lemma 1.10. Pemetaan $r\colon \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ adalah pemetaan terbuka.
Bukti:
Ambil sembarang himpunan buka U dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Jelas $r(U) = \left\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \middle| \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right) \in \mathbb{S}^{2n+1}\right\}$.
Jelas $r(U) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \cap \mathbb{S}^{2n+1}$ sedangkan $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ buka dalam dirinya, akibatnya $r(U)$ buka dalam $\mathbb{S}^{2n+1}$.
Jadi pemetaan $r\colon \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ adalah pemetaan terbuka.

Sekarang pandang diagram berikut ini:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^{2n+1} \arrow[d, "q"'] \\
\mathbb{C}P^n & \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \arrow[l, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

[Diagram 2]

Sembarang $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ berlaku $r\left((z_1, \dots, z_{n+1})\right) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$ dan $\pi\left((z_1, \dots, z_{n+1})\right) = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$. Jelas $q\left(r\left((z_1, \dots, z_{n+1})\right)\right) = q\left(\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$ dan $f^{-1}\left(q\left(r\left((z_1, \dots, z_{n+1})\right)\right)\right) = f^{-1}\left(\left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}\right) = \left[\frac{z_1}{|z|} : \dots : \frac{z_{n+1}}{|z|}\right] = [z_1 : \dots : z_{n+1}] = \pi\left((z_1, \dots, z_{n+1})\right)$
. Jelas $\pi = f^{-1} \circ q \circ r$; dengan kata lain Diagram 2 tersebut adalah komutatif.

Teorema 1.11. Pemetaan $f^{-1}\colon \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah kontinu.
Bukti:
Berdasarkan Lemma 1.10, jelas pemetaan r adalah terbuka.
Karena pemetaan q dan r adalah terbuka, berdasarkan Lemma 1.9, jelas $q \circ r$ adalah terbuka.
Karena pemetaan π adalah kontinu dan $q \circ r$ adalah terbuka serta memenuhi sifat $\pi = f^{-1} \circ q \circ r$ dari Diagram 2, berdasarkan Lemma 1.8, jelas pemetaan f^{-1} adalah kontinu.

Jadi pemetaan $f^{-1}: \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah kontinu.

Berdasarkan Teorema 1.5, Teorema 1.6, Teorema 1.7 dan Teorema 1.8 diperoleh bahwa pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah kontinu, bijektif dan inversnya kontinu; dengan kata lain bahwa pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah homeomorfisma.

KESIMPULAN

Simpulan dari tulisan ini adalah bahwa jika diberikan sebuah grup lingkaran satuan $G = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ dan sebuah sphere berdimensi-$2n+1$ yaitu $\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\}$ maka ruang faktornya yaitu $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 = \{[(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1} | (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}\}$ akan homeomorfik ke ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}P^n$ melalui homoemorfisma $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f([z_1 : \dots : z_{n+1}]) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$$

DAFTAR PUSTAKA

Agustito.D, Taufiq.I, Setyana.D S, Purwoko R Y., 2021., *Ruang Proyektif Kompleks* $\mathbb{C}P^n$ *adalah Manifold Kompleks*, Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika.

Dugundji, J., 1966,. *Topology*,. Michigan,. Allyn and Bacon.

Grillet, P, A,. 2007,. *Algebra*, Springer Science + Business Media, LLC, Newy-York.

Hundly, J,. 2009,. *Introduction to Lie Groups*, Southern Illinois University Carbondale.

Rotman, J,. 2005,. *A First Course in Abstract Algebra with Applications*, Prenstice Hall.

RUANG TOPOLOGI YANG MANA YANG HOMEOMORFIK DENGAN RUANG FAKTOR

ORIGINALITY REPORT

17%
SIMILARITY INDEX

PRIMARY SOURCES

1	www.coursehero.com Internet	207 words — 12%
2	jurnal.unigal.ac.id Internet	20 words — 1%
3	Pieter Spaas. "Non-classification of Cartan subalgebras for a class of von Neumann algebras", Advances in Mathematics, 2018 Crossref	17 words — 1%
4	vsip.info Internet	12 words — 1%
5	text-id.123dok.com Internet	11 words — 1%
6	www.cheric.org Internet	8 words — < 1%
7	repository.usd.ac.id Internet	7 words — < 1%
8	S A Widodo, R C I Prahmana, A S Purnami, Turmudi. "Teaching materials of algebraic equation", Journal of Physics: Conference Series, 2017 Crossref	6 words — < 1%

EXCLUDE QUOTES	ON	EXCLUDE MATCHES	OFF
EXCLUDE BIBLIOGRAPHY	ON		