Teorema: *Teori dan Riset Matematika*, *09*(01), 077–084, Maret 2024
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2020
https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/article/view/

Anti Turunan Bilangan Yang Tak Terintegralkan Menggunakan *Phyton*

Inne Syafrian Putri[1*], Thoriq Al Mahdi[2], Esih Sukaesih[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika,UIN Sunan Gunung Djati Bandung, Indonesia
E-mail: innesyafrian@uinsgd.ac.id
**Corresponding author*

ABSTRACT

Every a that satisfies $b' = a$ is called an integral of b. One of the ways to find arithmetic integrals is by using an integration function that aims to return the value of a to b for $a, b \in Z$, that is obtained from the correspondence between arithmetic derivatives and the Golbach's Conjecture. If there is no b that satisfies $b' = a$, then b is called non-integrable. However, b still has an integral in fractional numbers ($\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$) called the anti-derivative of b. To find the anti-derivative of a non-integrable number, It requires the arithmetic derivative formula for rational numbers and the numbers that satisfy $\frac{n'}{n} \in \mathbb{Z}$. This research aims to formulate the arithmetic integral formula and discover the anti-derivatives of non-integrable numbers.

Keywords: Arithmetic Derivative, Anti-Derivative, Arithmetic Integral, Goldbach's Conjecture

ABSTRAK

Setiap a yang memenuhi $b' = a$ disebut sebagai integral dari b. Salah satu cara untuk mencari integral aritmetika yaitu dengan menggunakan fungsi integrasi yang bertujuan mengembalikan nilai a ke b untuk $a, b \in \mathbb{Z}$, yang diperoleh dari korespondensi antara turunan aritmetika dengan konjektur Golbach. Jika tidak ada b yang memenuhi $b' = a$, maka b disebut tak terintegralkan. Akan tetapi, b masih memiliki integral pada bilangan pecahan ($\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$) yang disebut sebagai anti turunan dari b. Untuk menemukan anti turunan dari suatu bilangan yang tak terintegralkan diperlukan formula turunan aritmetika untuk bilangan rasional dan bilangan-bilangan yang memenuhi $\frac{n'}{n} \in \mathbb{Z}$. Penelitian ini bertujuan untuk merumuskan formula integral aritmetika dan menemukan anti turunan dari bilangan-bilangan yang tak terintegralkan.

Kata kunci: Anti turunan, integral aritmetika, konjektur goldbach, turunan aritmetika

Dikirim: November 2023; Diterima: Pebruari 2024; Dipublikasikan: Maret 2024
Cara sitasi: Putri, I. S., Al Mahdi, T., & Sukaesih, E. (2024). Anti Turunan Bilangan Yang Tak Terintegralkan Menggunakan Phyton. *Teorema*: *Teori dan Riset Matematika, 09*(01), 077–084.
DOI : 10.25157/teorema.v9i1.12728

PENDAHULUAN

Kalkulus merupakan cabang matematika yang mempelajari tentang limit, turunan, integral, dan deret tak hingga. Kalkulus memiliki kontribusi yang sangat besar terhadap bidang-bidang dan cabang ilmu lainnya (Stillwel, 2010). Konsep turunan dan integral dalam kalkulus ini kemudian diterapkan pada turunan dan integral aritmetika.

Turunan aritmetika merupakan pemetaan setiap bilangan prima ke bilangan 1 dan diperumum dengan aturan Leibnitz. Turunan aritmetika pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal spanyol, Josè Mingot Shelly, pada tahun 1911 (Balzarotti & Lava, 2013) dan kemudian teoremanya dimuat dalam buku yang berjudul "*La derivata aritmetica*" oleh Giorgio Balzarotti dan Paolo P. Lava pada tahun 2013. Namun sebelum itu, turunan aritmetika juga muncul pada kompetisi Putnam edisi ke-10 pada tahun 1950 (soal dengan kode A5), juga pada buku catatan Edward J. Barbeau yang berjudul "Remarks On An Arithmetic Derivative", pada tahun 1961 yang menjadi landasan dari hasil penelitian-penelitian selanjutnya (Barbeu,1961). Kemudian penjabaran tentang formula dan konjektur-konjektur terkait dikemukakan oleh Victor Ufnarovski dalam jurnalnya yang berjudul "How to Diffirentiate a Number" (Ufnarovski & Ahlander, 2003).

Pada tahun 2003, Viktor Ufnarovski mengkaji tentang properti-properti turunan aritmetika dan konektivitasnya dengan konjektur Goldbach. Dengan mengansumsikan bahwa konjektur Goldbach benar, maka akan selalu terdapat solusi untuk "persamaan diferensial" $n' = 2a.$. Berdasarkan sifat dan keterkaitan tersebut antara konjektur Goldbach dengan turunan aritmetika, maka dapat didefinisikan suatu fungsi yang mengembalikan nilai $2a$ (bilangan genap) dan $p+2$ ke n dan $2p$. Fungsi tersebut dinamakan dengan fungsi integrasi.

Giorgio Balzarotti menggunakan operator $\int N$ sebagai operator untuk mengintegralkan bilangan bulat N (Balzarotti & Lava, 2013). Berdasarkan konjektur Twin Prime dan teorema integral aritmetika, tidak semua bilangan bulat N bisa terintegralkan. Akan tetapi, bilangan-bilangan yang tidak terintegralkan tersebut masih memiliki anti-turunan yang bisa diperoleh nilainya dengan menggunakan teorema turunan aritmetika untuk bilangan rasional dengan bantuan properti $\frac{n'}{n} \in \mathbb{Z}$. Dalam artikel ini dibahas tentang algoritma menentukan anti turunan dari bilangan yang tak terintegralkan dan diaplikasikan pada program *phyton*.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dengan mengkaji berbagai sumber seperti buku dan jurnal. Kemudian dilakukan analisis terhadap teori yang ditemukan dan dirumuskan suatu formula untuk menentukan anti turunan dari bilangan yang tak terintegralkan. Formula anti turunan tersebut diterapkan pada bahasa pemrograman phyton sehingga diperoleh hasil anti turunan beberapa bilangan yang tak terintegralkan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 1. (Ufnarovski & Ahlander, 2003) Misalkan n adalah bilangan bulat positif, maka turunan aritmetika dari n, dilambangkan $D(n) = n'$ didefinisikan sebagai berikut:

1) $p' = 1$ untuk setiap bilangan prima p,
2) $(mn)' = m'n + mn'$ untuk setiap bilangan bulat positif m dan n

Berdasarkan definisi 1, diperoleh 2' = 1 dan 3' = 1 sehingga 6' = (3.2)' = 3'.2 + 3.2' = 5. Adapun 1' = (1.1)' = 1'.1 + 1.1' = 2.1' hanya dipenuhi oleh 1' = 0. Sedangkan untuk menghitung turunan dari bilangan n yang cukup besar menggunakan definisi akan butuh waktu yang lama. Semakin besar bilangan n maka semakin banyak juga faktor primanya. Faktorisasi prima merupakan cara untuk merepresentasikan suatu bilangan dari perkalian faktor primanya (Rosen, 2012). Oleh karena itu turunan aritmatika dari bilangan bulat positif dapat ditentukan menggunakan teorema berikut.

Teorema 2. (Sandhu, 2006) Jika $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ dengan p_i merupakan bilangan prima dan e_i adalah jumlah kelipatan dari p_i maka $n' = n \sum_{i=1}^{k} \frac{e_i}{p_i}$.

Turunan aritmetika dapat diperluas pada bilangan bulat nonpositif. Karena 0' = (0.a)' = 0'.a + 0.a' = 0'.a hanya dipenuhi oleh 0' = 0 dan untuk bilangan bulat negatif digunakan teorema berikut.

Teorema 3. (Ufnarovski & Ahlander, 2003) Jika n adalah bilangan bulat positif, maka

$$(-n)' = -(n')$$

Pada bulan Juni tahun 1742, seorang matematikawan Rusia, Christian Goldbach, mengirimkan surat kepada Leonhard Euler yang di dalamnya memuat suatu konjektur sebagai berikut: "Setiap bilangan bulat genap yang lebih besar dari 2 dapat ditulis sebagai penjumlah dari dua bilangan prima" (Merzbach & Boyer, 2011).

Berdasarkan Konjekur Goldbach tersebut, untuk $a > 1$, jika $2a = p + q$, maka $n = pq$ merupakan solusi dari $n' = 2a$. Jadi untuk setiap bilangan genap $2a$, persamaan $n' = 2a$ selalu memiliki solusi yaitu $n = pq$.

Bilangan yang Tak Memiliki Solusi

Untuk bilangan ganjil a yang memiliki solusi n atau $n' = a$ hanya dipenuhi oleh $a = p + 2$, karena $(2p)' = 2'.p + 2.p' = p + 2$. Akibatnya terdapat banyak bilangan ganjil lain yang tidak memenuhi $n' = a$. Daftar semua bilangan ganjil $a \leq 1000$ yang tidak memiliki solusi untuk $n' = a$ disajikan pada Tabel 1. berikut ini.

Tabel 1. Bilangan a yang tidak memiliki solusi untuk $n' = a \leq 1000$

2, 3, 11, 17, 23, 29, 35, 37, 47, 53, 57, 65, 67, 79, 83, 89, 93, 97, 107, 117, 125, 127, 137, 145, 149, 157, 163, 173, 177, 179, 189, 197, 205, 207, 209, 217, 219, 223, 233, 237, 245, 257, 261, 277, 289, 303, 305, 307, 317, 323, 325, 337, 345, 353, 367, 373, 377, 379, 387, 389, 393, 397, 409, 413, 415, 427, 429, 443, 449, 453, 457, 473, 477, 485, 497, 499, 509, 513, 515, 517, 529, 531, 533, 537, 547, 553, 561, 569, 577, 593, 597, 605, 613, 625, 629, 639, 657, 659, 665, 673, 677, 681, 683, 697, 699, 709, 713, 715, 733, 747, 749, 757, 765, 769, 777, 781, 783, 785, 787, 793, 797, 805, 809, 817, 819, 827, 833, 835, 845, 847, 849, 853, 857, 869, 873, 877, 881, 891, 895, 897, 907, 917, 925, 933, 937, 947, 953, 963, 965, 967, 981, 989, 997.

Dalam pembahasan selanjutnya, bilangan-bilangan seperti pada Tabel 1. diklasifikasikan sebagai bilangan yang tak terintegralkan.

Turunan Bilangan Rasional

Selain bilangan bulat, turunan aritmatika juga dapat ditentukan pada bilangan rasional dengan menggunakan teorema berikut:

Teorema 4. (Ufnarovski & Ahlander, 2003) Jika $a, b \in \mathbb{Z}^+$ maka

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2} \text{ dan } \left(-\frac{a}{b}\right)' = -\left(\frac{a}{b}\right)'$$

Integral Aritmetika

Victor Ufnarovski secara implisit menunjukkan bahwa terdapat suatu fungsi yang mengembalikan nilai n' ke n yang disebut sebagai fungsi integrasi. Sementara Juric Kovic mendefinisikan bahwa "setiap a sedemikian sehingga $b' = a$ disebut sebagai integral dari b."

Definisi 5. (Kovic, 2012) Misalkan a sembarang bilangan bulat. Integral dari a, dinotasikan dengan $\int a$ adalah bilangan bulat b yang memenuhi $b' = a$. Jika tidak terdapat bilangan bulat b sehingga $b' = a$ maka a disebut tidak terintegralkan.

Berdasarkan definisi 4, karena $6' = 5$ maka $\int 5 = 6$. Namun dengan contoh tersebut, integral aritmetika diperoleh dengan cara meninjau hasil turunan dari suatu bilangan. Proses tersebut tidak efisien karena untuk menemukan hasil integral dari a, maka harus dilakukan proses pencarian bilangan b sedemikian sehingga $b' = a$. Oleh karena itu integral arirmetika dapat ditentukan dengan teorema berikut.

Teorema 6. Jika p dan q bilangan prima dan $n = p + q$ maka integral aritmetika dari n adalah $\int n = \int(p+q) = pq$.

Bukti :

Karena $(pq)' = p'.q + p.q' = 1.q + p.1 = p + q$ maka dengan definisi 4 diperoleh $\int n = \int(p+q) = pq$. ■

Misalkan $n = p + q$ dengan p dan q bilangan prima, maka terdapat dua kemungkinan, yaitu n genap atau n ganjil. Jika $p = q = 2$, maka n merupakan bilangan genap. Begitupun jika $p > 2$ dan $q > 2$, maka n tetap bilangan genap. Bilangan n ganjil hanya dipenuhi oleh $p + q$ yang salah satunya sama dengan 2 dan yang lainnya lebih besar dari 2.

Sehingga, terdapat dua bagian pada pembahasan integral aritmetika, yaitu integral aritmetika bilangan genap dan integral aritmetika bilangan ganjil.

Integral Bilangan Genap

Teorema 7. Jika n merupakan bilangan genap dengan $n = p + q$, dimana p dan q bilangan prima maka $\int n = \int(p+q) = pq$ dan $\int -n = \int -(p+q) = -(pq)$.

Berdasarkan Teorema 7, setiap bilangan genap yang bukan $2, -2,$ dan 0 selalu bisa diintegralkan. Akan tetapi, karena $n = p + q$ secara umum tidak bersifat tunggal untuk pasangan p dan q, maka hasil integralnya pun tidak tunggal. Contoh bilangan genap yang memiliki hasil integral yang tidak tunggal adalah 10. Karena $10 = 5 + 5 = 7 + 3$, maka $\int(5+5) = 5.5 = 25$ dan $\int(7+3) = 7.3 = 21$.

Teorema 7 menunjukkan hasil integral n yang selalu lebih besar dari n. Hal tersebut terjadi karena, untuk $n \neq 4$ maka:

$$n = p + q < pq = \int(p+q) = \int n$$

Akan tetapi terdapat bilangan bulat 36 yang turunan aritmetikanya $36' = 36\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{3}\right) = 60$ sehingga $\int 60 = 36$ lebih kecil dari 60.

Integral Bilangan Ganjil

Teorema 8. Jika $n = p + 2$ merupakan bilangan ganjil dengan p prima, maka $\int n = \int (p + 2) = 2p$ dan $\int -n = \int -(p + 2) = -(2p)$.

Tidak semua bilangan ganjil berbentuk $n = p + 2$. Sebagai contoh, tidak ada p prima yang memenuhi 11 = p + 2. Sehingga bilangan 11 tidak dapat diintegralkan dengan Teorema 8.
Beberapa bilangan ganjil n yang memenuhi $n = p + 2$ yaitu 9, 13, dan 21 sehingga

$$\int 9 = \int (7 + 2) = 14$$

$$\int 13 = \int (11 + 2) = 22$$

$$\int 21 = \int (19 + 2) = 38$$

Pembahasan integral aritmetika berlanjut pada bilangan-bilangan yang tidak bisa diintegralkan, bilangan tersebut umumnya merupakan bilangan ganjil. Bilangan ganjil n yang memenuhi $n = p + 2$ bisa diintegralkan. Namun, untuk bilangan ganjil n yang tidak memenuhi $n = p + 2$ terkategorikan sebagai berikut:

a) n tersebut masih memiliki integral karena ada bilangan bulat a yang memenuhi $a' = n$. Contohnya adalah 87. Karena $110' = 87$

b) n tidak terintegralkan karena tidak ada bilangan bulat a yang memenuhi $a' = n$.

Pada Tabel 1 telah ditunjukkan bahwa terdapat banyak bilangan bulat a dan n yang tidak memenuhi $n' = a$. Sehingga, dikatakan bahwa a tidak memiliki integral di bilangan bulat. Namun, dengan menggunakan konsep dari turunan aritmetika untuk bilangan rasional, dapat ditemukan bahwa $n' = a$ memiliki solusi pada $n \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. Sedemikian sehingga, n tersebut disebut sebagai anti turunan dari a.

Formula Mencari Anti Turunan

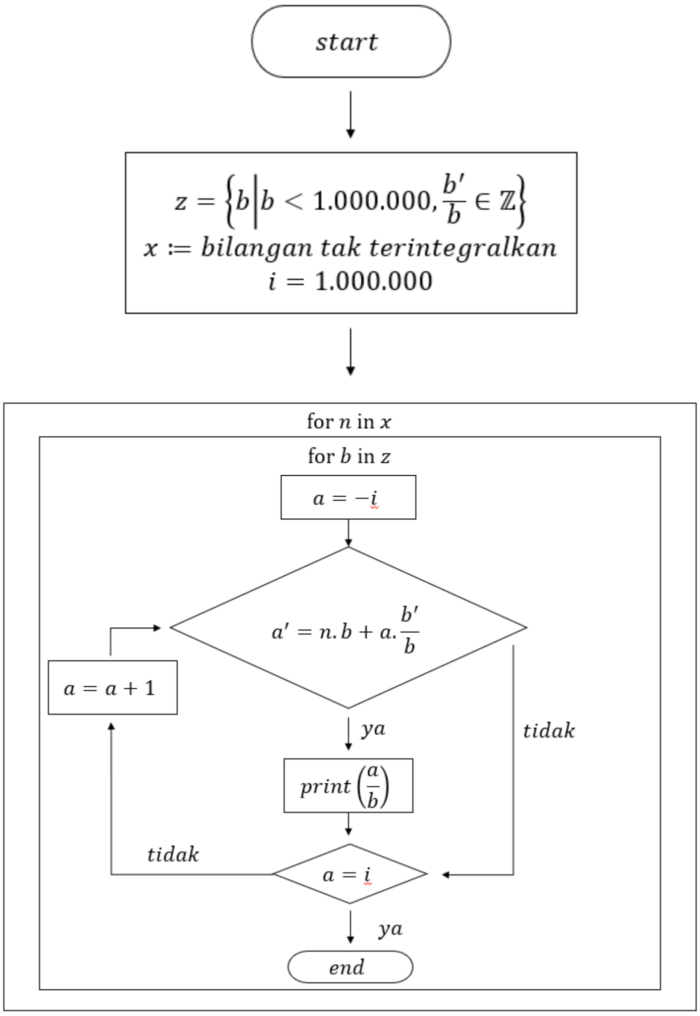
Misalkan n merupakan bilangan yang tidak terintegralkan, anti turunan dari n adalah $\frac{a}{b}$ yang memenuhi

$$a' = n.b + a.\frac{b'}{b}$$

dengan b merupakan bilangan yang memenuhi $\frac{b'}{b} \in \mathbb{Z}$

Algoritma Mencari Anti Turunan dari Bilangan yang Tak Terintegralkan

Studi kasus yang digunakan adalah bilangan-bilangan $n \leq 500$ yang tidak terintegralkan yang terdapat pada Tabel 1, dengan nilai $a = 1.000.000$, yang artinya iterasi dimulai dari $-1.000.000$ sampai $1.000.000$. Adapun *flowchart* dari algoritma untuk menemukan anti turunan dari bilangan-bilangan yang tak terintegralkan disajikan pada gambar berikut:



Gambar Flowchart Algoritma Anti Turunan

Algoritma tersebut diterapkan pada bahasa pemrograman phyton sebagai berikut:

```
#=== Program Mencari Anti Turunan ===#
#n'/n == integer dalam range 1jt
z =[]
for i in range(1,1000000):
    if i==0:
        pass
    elif float(turunan(i)/i).is_integer()==True:
        z.append(i)
print(z)

#formula untuk mencari (a/b)'=n
for n in A098700_list:
  print("Mulai untuk n={}".format(n))
  for b in z:
      print("\n =====","n=",n,"b=",b,"=====")
      for a in range(-1000000,1000000):
          if turunan(a)==n*(b)+a*turunan(b)/(b):
              print(a,b)
```

Beberapa hasil anti turunan dari bilangan-bilangan yang tak terintegralkan disajikan pada Tabel 2 berikut:

Tabel 2. Anti Turunan Bilangan yang Tak Terintegralkan

n	Anti Turunan n
2	-21/16, -43/64, -172/256, -1344/1024, -2268/1728, -5376/4096, -9072/6912, -15309/11664, -11008/16384, -18576/27648, -31347/46656, -86016/65536
3	-13/4, 11385/4, -52/16, -266/27, -166/27, -208/64, -1701/108, -664/108, 307395/108, -832/256, -6804/432, -2656/432, -7182/729, -16128/1024, -711/1024, -17024/1728, -5616/1728, -28728/2916, -9477/2916, -18754/3125,
11	-27104/432, -4477/729, -182952/2916, -206286/3125, -51567/3125, -731808/11664, -825144/12500
17	-517/27, -2068/108, -8272/432, -13959/729, -9142/729, -6197/729, -33088/1728, -7387/1728, -55836/2916, -24788/2916, -238714/3125, -144742/3125
23	-491/64, -1964/256, -48006/729, -113792/1728, -192024/2916, -431286/3125, -455168/6912, -768096/11664, -150601/12500, -212112/27648
29	-841/27, -619/64, -3364/108, -15760/432, -26595/729, -17170/729, -16270/729, -14446/729, -63040/1728, -16713/1728, -90828/2916, -65080/2916
35	-9950/27, -1894/27, -39800/108, -7425/108, -159200/432, -29700/432, -5825/432,
37	-2318/27, -1255/27, -1111/27, -9272/108, -4444/108, -9536/256, -20080/432,

KESIMPULAN

Bilangan genap positif yang lebih besar dari 2 selalu bisa terintegralkan dan secara umum memiliki hasil integral yang tidak tunggal. Bilangan ganjil n selain 1 hanya bisa diintegralkan apabila memenuhi $n = p + 2$, dengan p merupakan bilangan prima yang lebih besar dari 2. Bilangan bulat n yang tak terintegralkan memiliki anti turunan $\frac{a}{b}$ yang diperoleh dengan cara mengiterasikan formula $a' = n.b + a.\frac{b'}{b}$, dengan a adalah nilai iterasinya dan b adalah bilangan yang memenuhi $\frac{b'}{b} \in \mathbb{Z}$. Anti turunan dari bilangan yang tak terintegralkan diperoleh dengan menerapkan algoritma anti turunan pada bahasa pemrograman *phyton*.

DAFTAR PUSTAKA

Balzarotti, G. & Lava, P. P. (2013). La derivate aritmetica ; Alla scoperta di un nuovo approcio alla teoria dei numeri, Milan : Hoepli.

Merzbach, U. C. & Boyer, C. B. (2011). A History of Mathematics, Third Edition USA: John Wiley & Sons.

Rosen, K. H. (2012). Discrete Mathematics and Its Applications, 7th Edition, New York: McGraw-Hill.

Sandhu, A. (2006). An Exploration of the Arithmetic Derivative. Final Research Report, University of Arizona.

Stillwell, J. (2010) Mathematics and Its History, Third Edition, USA: Springer Science & Business Media

Ufnarovski, V. & Ahlander, B. (2003) “How to Differentiate a Number”, Journal of Integer Sequences, vol. 6, article 03.3.4.