BILANGAN KROMATIK PERMAINAN GRAF POT BUNGA (C_mS_n) DAN GRAF POHON PALEM $(C_kP_lS_m)$

Abdul Mujib
Universitas Muslim Nusantara Al-Washliyah Medan
email: mujib_umnaw@yahoo.co.id

ABSTRAK

Dua orang pemain, pemain pertama sebut saja X dan pemain kedua dinamakan Y mewarnai titik-titik pada graf G dengan memilih warna dari himpunan warna $C = \{1,2,3,\ldots,k\}$. X bertujuan agar semua titik pada graf G dapat terwarnai. Sedangkan Y bertujuan untuk mencegah X mencapai tujuannya. Langkah pertama kali dilakukan oleh X sebagai pemain pertama, kedua pemain secara bergantian mewarnai titik-titik di graf G, dengan aturan setiap titik harus berwarna berbeda dari titik-titik tetangganya. Jika semua titik di graf G terwarnai, maka X menang dan jika sebaliknya Y menang. Bilangan k terkecil sedemikian sehingga X mempunyai strategi untuk menang pada graf G dengan k warna disebut bilangan kromatik permainan dari graf G yang dinotasikan $\chi_g(G)$. Penelitian ini mengkaji bilangan kromatik permainan dari graf C_mS_n dan graf $C_kP_lS_m$. Penelitian ini menghasilka dua teorema $\chi_g(C_mS_n)$ dan $\chi_g(C_kP_lS_m)$.

.

Kata Kunci: Bilangan kromatik, Bilangan kromatik permainan, Graf pot bunga, Graf pohon palem.

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga (C_mS_n) dan Graf Pohon Palem $(C_kP_lS_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.

PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu kajian menarik yang dibahas dalam Matematika Diskrit yang mempelajari tentang sifat-sifat graf. Ilmu graf telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan di berbagai bidang, sehingga masih banyak penelitian yang dapat dikembangkan sampai sekarang. Secara umum, graf adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V menyatakan himpunan titik yang tak kosong dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik pada graf tersebut (Bondy & Murty, 2008).

Manfaat teori graf sangat banyak. Umumnya graf digunakan untuk memodelkan suatu masalah sehingga menjadi lebih mudah, yaitu dengan cara merepresentasikan objek pada masalah tersebut menjadi unsur dalam suatu graf. Seperti pemodelan pemetaan, optimasi, masalah jalur tercepat, dan kajian-kajian lainnya. Salah satu topik menarik dalam teori graf adalah masalah pewarnaan graf. Terdapat tiga macam pewarnaan dalam graf, yakni pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Masalah utama pewarnaan titik adalah bagaimana mewarnai semua titik pada graf tersebut sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Hal ini biasanya dikaitkan dengan penggunaan k warna terkecil. Bilangan k terkecil sehingga semua titik pada graf G dapat terwarnai dengan dengan k warna disebut bilangan kromatik, dinotasikan $\chi(G)$ (Diestel, 2005).

Masalah pewarnaan titik pada graf memiliki banyak aplikasi di berbagai bidang, misalnya dalam pembuatan jadwal, penentuan frekuensi radio, bahkan berkembang dalam bentuk permainan. Salah satu bentuk permainan graf adalah Permainan Bilangan Kromatik. Konsep dasar dari permainan ini pertama kali diperkenalkan oleh (Bodlaender, 1991). Kemudian permainan ini berkembang pada kelas-kelas graf tertentu. Seperti permainan bilangan kromatik yang dikaji oleh Peterin (Peterin, 2007) dan Bartnicki dkk (Bartnicki dkk., 2008) pada kelas graf hasil kali tensor yaitu graf $K_2 \otimes P_n$, $K_2 \otimes C_n$, $\mathrm{dan}\ K_2 \otimes K_n$. Kemudian pada tahun 2011, (Mujib & Assiyatun, 2011) mengkaji perumuman dari graf hasil kali tensor $K_3 \otimes K_{1,n}$ dan $P_m \otimes K_{1,n}$. Banyaknya kelas graf, memungkinkan masalah ini masih menjadi kajian yang terus berkembang sampai saat ini.

Pada permainan ini, dua orang pemain, pemain pertama sebut saja X dan pemain kedua dinamakan Y mewarnai titik-titik pada graf G dengan memilih warna dari himpunan warna $C = \{1,2,3, \dots, k\}$ yang tersedia. X bertujuan agar semua titik pada graf G dapat terwarnai. Sedangkan Y bertujuan untuk mencegah X mencapai tujuannya. Langkah pertama kali dilakukan oleh X sebagai pemain pertama, kedua pemain secara bergantian mewarnai titik-titik di graf G, dengan aturan setiap titik harus berwarna berbeda dari titik-titik tetangganya. Jika semua titik di graf G terwarnai, maka X menang dan jika sebaliknya Y menang. Bilangan k terkecil sedemikian sehingga X mempunyai strategi untuk memenangkan permainan pada graf G dengan k warna disebut bilangan kromatik permainan dari graf G yang dinotasikan $\chi_g(G)$ (Mujib, 2011).

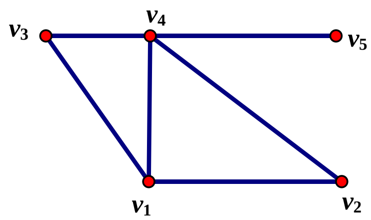
Merujuk pada definisi bilangan kromatik permainan, menentukan bilangan kromatik permainan dari graf G yang dinotasikan dengan $\chi_g(G)$ masih menjadi kajian menarik sampai saat ini. Karena untuk mendapatkan $\chi_g(G)$, pertama harus menentukan terlebih dahulu nilai $\chi(G)$-nya, kedua menentukan rentang batas bilangan kromatik permainannya, dan akhirnya menemukan bilangan kromatik permainan graf tersebut yang artinya X mempunyai strategi untuk memenangkan permainan pada graf G.

Banyaknya kelas graf menjadikan masalah bilangan kromatik permainan merupakan topik yang terus berkembang dan menghasilkan teorema-teorema baru pada kelas graf tertentu. Kelas graf yang dikaji dalam penelitian ini adalah graf pot bunga dan graf pohon palem. Sebelum mengekplorasi bilangan kromatik permainan dari kedua graf tersebut. Terlebih dahulu akan akan dikaji konsep dasar graf dan beberapa kelas graf pendukungnya seperti graf lintasan, graf bintang, dan graf lingkaran.

Suatu graf G merupakan pasangan himpunan $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan tak kosong yang disebut titik dan $E \subseteq V^2$ yang merupakan subhimpunan 2-elemen dari V yang disebut sisi.

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga $(C_m S_n)$ dan Graf Pohon Palem $(C_k P_l S_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.

Pada umumnya graf disajikan dalam bentuk grafis, dengan anggota himpunan V digambarkan sebagai titik, sedangkan anggota himpunan E sebagai garis yang menghubungkan dua buah titik yang bersesuaian. Sebagai contoh, Gambar 1 adalah graf G dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ dimana $e_1 = v_1v_3, e_2 = v_1v_2, e_3 = v_2v_4, e_4 = v_3v_4, e_5 = v_4v_1, e_6 = v_4v_5$.



Gambar 1. Graf $G = (V, E)$

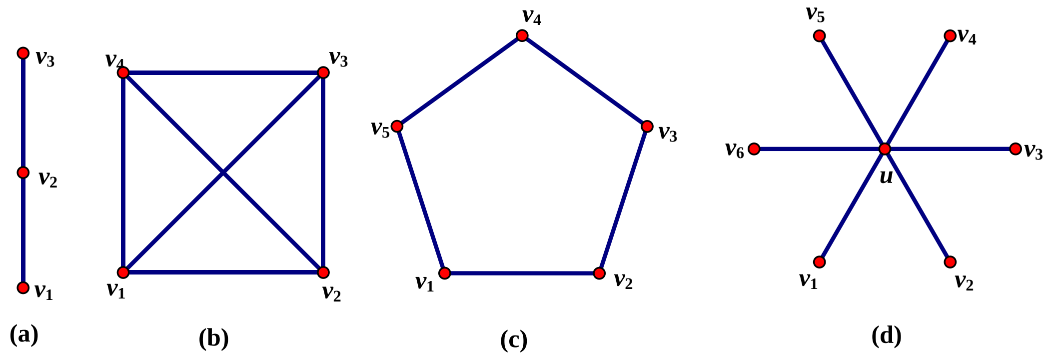
Misalkan $e_k = v_iv_j, i \neq j$ yaitu sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j di V. Jika titik v_i dan v_j terhubung oleh suatu sisi e_k di G, maka titik v_i dan v_j dikatakan bertetangga di G, dan titik v_i dan v_j disebut titik ujung dari e_k. Titik v_i dan v_j dikatakan saling bebas jika v_i dan v_j tidak bertetangga. Graf G dikatakan graf lengkap, dinotasikan dengan K_n jika setiap dua titik pada G bertetangga (Hartsfield & Ringel, 2003). Berdasarkan Gambar 1, jelas graf G bukan graf lengkap. Karena terdapat dua titik yang saling bebas seperti titik v_1 dengan v_5, dan v_2 dengan v_3 dan v_5.

Banyak sisi yang terkait pada suatu titik v_i di G disebut derajat titik v_i, dilambangkan dengan $d_G(v_i)$. Derajat terkecil dari suatu graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$, sedangkan derajat terbesar pada graf G dinotasikan $\Delta(G)$ (Bondy & Murty, 2008). Graf G pada Gambar 1 mempunyai barisan derajat $d_G(v_1) = 3, d_G(v_2) = 2, d_G(v_3) = 2, d_G(v_4) = 4, d_G(v_5) = 1$ sehingga diperoleh $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 4$.

Suatu graf G dengan n titik dikatakan graf lintasan, dinotasikan dengan P_n, jika G graf terhubung dengan dua titik berderjat satu dan $n-2$ titik berderajat dua. Kasus khusus untuk $n = 1$ maka graf P_1 disebut graf trivial. Graf G dikatakan graf reguler jika derajat setiap titiknya sama. Graf $G = (V; E)$ disebut graf k-reguler jika $d_G(v_i) = k$ untuk setiap $v_i \in V$. Graf K_n merupakan graf $(n-1)$-reguler, karena setiap titiknya berderajat $n-1$. Graf siklus berorde $n, n \geq 3$ dinotasikan C_n adalah graf terhubung 2-reguler (Hartsfield & Ringel, 2003).

Suatu graf $G = (V, E)$ disebut graf bipartit jika V dapat dipartisi menjadi dua buah subhimpunan tak kosong A dan B sedemikian sehingga untuk setiap sisi di G berlaku salah satu ujungnya berada di A dan ujung lainnya berada di B. Misalkan $|A| = m$ dan $|B| = n$ dimana $m, n \geq 1$. Jika setiap titik di A bertetangga dengan titik di B, maka G disebut graf bipartit lengkap, dinotasikan dengan $K_{m,n}$. Graf bintang dinotasikan dengan S_n, yaitu graf bipartit lengkap dengan $|A| = 1$ dan $|B| = n$ (Hartsfield & Ringel, 2003). Graf S_1 isomorpik dengan graf P_2 dan graf S_2 isomorpik dengan graf P_3. Gambar 2 berikut ini menggambarkan graf P_3, K_4, C_5, dan graf S_6.

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga (C_mS_n) dan Graf Pohon Palem $(C_kP_lS_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.

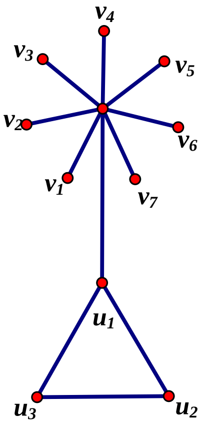


Gambar 2. (a) Graf P_3, (b) Graf K_4, (c) Graf C_5, (d) Graf S_6

Definisi 1. (Ahmad, 2012)

Graf pot bunga adalah gabungan graf lingkaran dan graf bintang yang dihubungkan dengan sebuah sisi yang mengkaitkan titik pusat graf bintang S_n dengan salah satu titik pada graf lingkaran C_m. Graf pot bunga dinotasikan C_mS_n dimana $m, n \geq 3$.

Berdasarkan Definisi 1 di atas, Gambar 3 berikut adalah contoh graf pot bunga C_3S_7. Berdasarkan Gambar 3, diketahui bahwa derajat terkecil dari graf pot bunga adalah terdapat pada titik-titik pada komponen graf bintang S_7 yang berderajat satu yaitu $d_{C_3S_7}(v_i) = 1, i = 1,2,3, \dots, 7$ dan juga derajat terbesarnya di titik pusat komponen graf bintang S_7 yaitu $d_{C_3S_7}(v) = n + 1$. Oleh karena itu, $\delta(C_3S_7) = 1$ dan $\Delta(C_3S_7) = 8$. Dengan demikian $\delta(C_mS_n) = 1$ dan $\Delta(C_mS_n) = n + 1$.



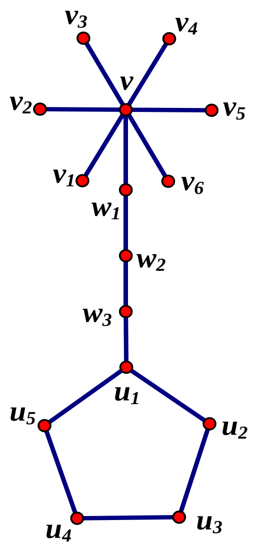
Gambar 3. (a) Graf Pot Bunga C_3S_7

Definisi 2. (Ahmad, 2012)

Graf pohon palem adalah graf yang menggabungkan antara tiga graf yaitu graf lingkaran C_k, graf lintasan P_l, dan graf bintang S_m. Dimana graf C_k dikaitkan dengan sebuah sisi ke titik ujung graf P_l dan titik ujung lainnya dari P_l dikaitkan oleh sebuah sisi pada titip pusat graf C_m. Graf pohon palem dinotasikan dengan $C_kP_lS_m$, dimana $k \geq 3, l \geq 2, m \geq 3$.

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga (C_mS_n) dan Graf Pohon Palem $(C_kP_lS_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.

Berdasarkan Definisi 2 di atas, Gambar 4 berikut adalah contoh graf pot bunga $C_5P_3S_6$. Derajat terkecil dari graf pohon palem adalah titik-titik pada komponen graf bintang S_6 yang berderajat satu dan derajat terbesarnya adalah titik pusat komponen graf bintang S_6. Oleh karena itu, $\delta(C_5P_3S_6) = 1$ dan $\Delta(C_5P_3S_6) = 7$. Secara general $\delta(C_kP_lS_m) = 1$ dan $\Delta(C_kP_lS_m) = m + 1$.



Gambar 4. (a) Graf Pohon Palem $C_5P_3S_6$

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan mempelajari artikel ilmiah dari berbagai jurnal nasional maupun internasional dan buku-buku yang berkaitan dengan topik penelitian yaitu bilangan kromatik permainan. Selanjutnya hasil studi literatur tersebut digunakan sebagai dasar teoritis untuk mendapatkan bilangan kromatik permainan dari graf pot bunga C_mS_n dan graf pohon palem $C_kP_lS_m$. Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Melakukan kajian literatur untuk memahami definisi bilangan kromatik permainan beserta sifat-sifatnya serta teori-teori yang mendukungnya.
2. Mengkaji karakteristik graf pot bunga dan graf pohon palem, membuat definisi dan notasi graf pot bunga dan graf pohon palem.
3. Mengkonstruksi perumuman dari graf pot bunga dan graf pohon palem.
4. Melakukan simulasi permainan bilangan kromatik graf pot bunga dan graf pohon palem untuk menemukan strategi supaya pemain pertama memenangkan permainan.
5. Membuat konjektur/teorema tentang $\chi_g(C_mS_n)$ dan $\chi_g(C_kP_lS_m)$.
6. Membuktikan teorema $\chi_g(C_mS_n)$ dan $\chi_g(C_kP_lS_m)$ dan melakukan konstruksi bukti matematis secara formal.

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga (C_mS_n) dan Graf Pohon Palem $(C_kP_lS_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Hasil Penelitian Sebelumnya

Penelitian sebelumnya berkaitan dengan bilangan kromatik permainan penting diungkapkan disini sebagai dasar teori untuk menentukan bilangan kromatik permainan dari graf pot bunga dan graf pohon palem. Beberapa teorema tentang bilangan kromatik permainan dari graf tertentu diantaranya:

Teorema 1. (Bartnicki et al., 2008)

Jika G adalah graf dengan derajat terbesar $\Delta(G)$, maka $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$

Bukti:

Berdasarkan definisi $\chi(G)$, jika warna yang disediakan kurang dari $\chi(G)$, maka graf G tidak dapat diwarnai dengan k titik. Dengan demikian, bilangan kromatik permainan dari graf G tidak mungkin kurang dari $\chi(G)$ sehingga diperoleh $\chi_g(G) \geq \chi(G)$.

Kemudian, jika pemain pertama dapat mewarnai sedemikian sehingga untuk setiap titik $v \in V(G)$ dan setiap tetangga dari v mempunyai warna yang berbeda, maka pemain pertama akan selalu menang. Hal ini dapat dilakukan jika tersedia warna $\Delta(G) + 1$. Sehingga diperoleh $\chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$.
Dengan demikian, $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ ■

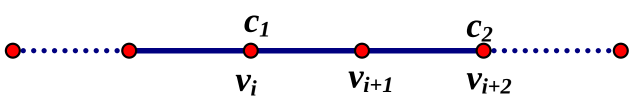
Teorema 1 ini memberikan batasan interval dari bilangan kromatik permainan graf G, dimana batas bawah bilangan kromatik permainan adalah bilangan kromatik dari graf G dengan batas atasnya adalah derajat terbesar ditambah satu. Untuk itu, menentukan bilangan kromatik permainan dari graf G, terlebih dahulu ditentukan bilangan kromatik dari graf G tersebut.

Teorema 2. (Mujib, 2011)

$$\chi_g(P_n) = \begin{cases} 2, untuk\ n = 2,3 \\ 3, untuk\ n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti:

Diketahui bahwa $\chi(P_n) = 2$. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_g(P_2) = \chi_g(P_3) = 2$. Misalkan tersedia dua warna $C = \{c_1, c_2\}$. Pandang lintasan P_2, setiap titiknya berderajat satu. Dengan demikian dua warna pasti dapat mewarnai titik di P_2. Berdasarkan graf P_3, pada langkah pertama X mewarnai titik berderajat dua dengan warna c_1. Akibatnya titik yang tersisa pasti dapat terwarnai dengan warna c_2. Jadi, $\chi_g(P_2) = \chi_g(P_3) = 2$. Selanjutnya, untuk $n \geq 4$. Berdasarkan Teorema 1, maka $2 \leq \chi_g(P_n) \leq 3$.



Gambar 5. Permainan pewarnaan pada P_n

Pandang lintasan P_n pada Gambar 5, tanpa mengurangi keumuman, jika X mewarnai titik berderajat dua, misalkan titik v_i dengan warna c_1, maka Y selalu memiliki kesempatan mewarnai titik v_{i+2} dengan warna c_2. Akibatnya titik v_{i+1}tidak dapat diwarnai dengan dua warna yang tersedia. Dengan demikian, $\chi_g(G) \geq 3$. Jadi, $3 \leq \chi_g(G) \leq 3$ atau $\chi_g(G) = 3$ ■

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga (C_mS_n) dan Graf Pohon Palem $(C_kP_lS_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.

Teorema 3. (Mujib, 2011)

$$\chi_g(C_n) = 3, untuk\ n \geq 3$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 1, maka $2 \leq \chi_g(C_n) \leq 3$ untuk n genap dan $\chi_g(C_n) = 3$ untuk n ganjil. Akan ditunjukkan $\chi_g(C_n) \geq 3$ untuk n genap. Karena C_n adalah graf 2 −reguler, maka $d(v) = 2, \forall v \in V(C_n)$. Misalkan tersedia dua warna $C = \{c_1, c_2\}$. Misalkan X mewarnai titik v dengan warna c_1. Maka Y selalu dapat mewarnai titik yang berjarak dua dari v dengan warna c_2. Akibatnya, salah satu tetanga dari v tidak dapat diwarnai. Dengan demikian, $\chi_g(C_n) \geq 3$. Jadi, $\chi_g(C_n) = 3, untuk\ n \geq 3$ ■

Teorema 4. (Mujib, 2011)

$$\chi_g(S_n) = 2, untuk\ n \geq 2$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 1, $\chi_g(S_n) \geq 2$. Misalkan disediakan himpunan warna $C = \{c_1, c_2\}$. Karena $\Delta(S_n) = n$, maka langkah pertama X mewarnai titik berderajat n dengan warna c_1. Karena titik yang belum terwarnai saling bebas, maka akan sellalu bisa diwarnai dengan warna c_2. Dengan demikian, $\chi_g(S_n) \leq 2$. Jadi, $\chi_g(S_n) = 2$ ■

Selanjutnya, graf pot bunga dan graf pohon palem merupakan gabungan dari graf lintasan, graf bintang, dan graf lingkaran. Sehingga teorema-teorema diatas dijadikan sebagai acuan dasar dalam menentukan bilangan kromatik permainannya.

2. Hasil Penelitian

Hasil dari dari penelitian ini menghasilkan dua teorema. Pertama teorema bilangan kromatik permainan dari graf pot bunga $\chi_g(C_m S_n)$ dan yang kedua teorema bilangan kromatik permainan dari graf pohon palem $\chi_g(C_k P_l S_m)$.

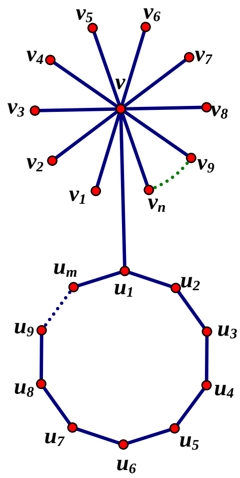
Teorema 5

$$\chi_g(C_m S_n) = 3, untuk\ m, n \geq 3$$

Bukti:

Gambar 6 berikut ini merupakan perumuman dari graf pot bunga $C_m S_n$.

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga $(C_m S_n)$ dan Graf Pohon Palem $(C_k P_l S_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.



Gambar 6. Perumuman Graf Pot Bunga C_mS_n

Graf $C_mS_n$terdiri dari dua komponen yaitu komponen C_m dan komponen S_n. Berdasarkan Teorema 3 dan 4, maka $\chi_g(C_mS_n) \geq 3$. Misalkan diberikan himpunan warna $C = \{c_1, c_2, c_3\}$. Strategi X adalah memastikan titik berderajat $n+1$ pada komponen S_n yaitu titik v dan titik berderajat 3 pada komponen C_m yaitu titik u_1 terwarnai terlebih dahulu sebelum titik yang lainnya (lihat gambar 6). Ada dua kemungkinan langkah pertama dari X, yaitu mewarnai titik v atau titik u_1.

Kasus 1. Langkah pertama X mewarnai titik v dengan warna c_1.
Subkasus 1
Jika Y mewarnai titik u_1 dengan warna c_2, karena $d(u_i) = 2, i = 2,3, \dots, m$ dan $d(v_j) = 1, j = 1,2,3, \dots n,$ maka setiap titik yang tersisa akan selalu bisa diwarnai dengan tiga warna.

Subkasus 2
Jika Y mewarnai titik selain u_1 dengan warna c_2, tanpa mengurangi keumuman misalkan titik u_2. Maka langkah kedua dari X adalah mewarnai titik u_1 dengan warna c_3. Karena $\chi_g(C_m) = 3$ dan $\chi_g(S_n) = 2$, maka himpunan titik $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan $\{v_3, v_4, \dots, v_m\}$ akan selalu bisa diwarnai dengan tiga warna tersedia.

Berdasarkan subkasus 1 dan subkasus 2, maka X selalu memenangkan permainan. Dengan demikian $\chi_g(C_mS_n) = 3$

Kasus 2. Langkah pertama X mewarnai titik u_1 dengan warna c_1.
Subkasus 1
Jika Y mewarnai titik v dengan warna c_2, karena himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ saling bebas, maka setiap titik akan selalu bisa diwarnai dengan tiga warna. Karena $d(u_i) = 2, i = 2,3, \dots, m$, maka setiap titiknya akan selalu bisa diwarnai dengan tiga warna.

Subkasus 2
Jika Y mewarnai titik selain v dengan warna c_2. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan mewarnai titik u_2. Maka langkah kedua dari X mewarnai titik v dengan warna c_3. Akibatnya, setiap titik yang tersisa selalu dapat diwarnai dengan warna yang tersedia.

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga (C_mS_n) dan Graf Pohon Palem $(C_kP_lS_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.

Berdasarkan subkasus 1 dan subkasus 2, maka X memeiliki strategi memenangkan permainan dengan tiga warna. Dengan demikian, $\chi_g(C_mS_n) = 3$.
Jadi, berdasarkan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh bahwa $\chi_g(C_mS_n) = 3$■

Teorema 6

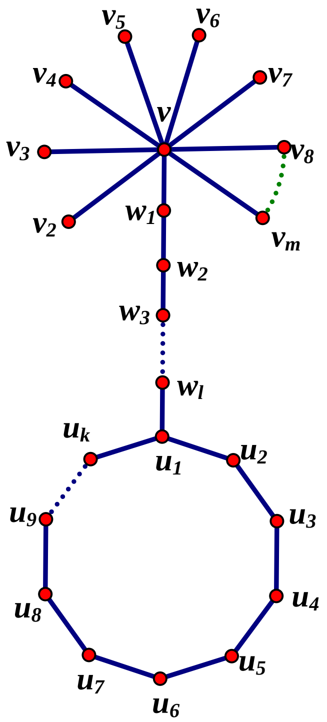
$$\chi_g(C_kP_lS_m) = 3, untuk\ k \geq 3, l \geq 2, m \geq 2$$

Bukti:
Gambar 7 berikut ini merupakan gambar perumuman dari graf pohon palem $C_kP_lS_m$. Graf $C_kP_lS_m$ terdiri dari tiga komponen yaitu komponen C_k, komponen P_l, dan komponen S_m. Dengan $\delta(C_kP_lS_m) = 1$ dan $\Delta(C_kP_lS_m) = m + 1$. Karena komponen C_k memiliki $\chi_g(C_k) = 3$, berdasarkan Teorema 1 maka $3 \leq \chi_g(C_kP_lS_m) \leq m + 2$.

Jika di kaitkan denga graf pot bunga C_mS_n, maka graf pot bunga $C_mS_n$merupakan kasus khusus dari graf pohon palem $C_kP_lS_m$ untuk $l = 0$. Oleh karena itu, strategi X dalam memenangkan permainan bilangan kromatik pada graf pot bunga C_mS_n dapat diadopsi pada graf pohon palem $C_kP_lS_m$. Cukup memastikan komponen lintasan P_l dapat diwarnai dengan warna yang tersedia.

Akan ditunjukkan bahwa $\chi_g(C_kP_lS_m) = 3$. Berdasarkan Teorema 2, $\chi_g(P_l) = 2$ untuk $l = 2\ dan\ 3$ serta $\chi_g(P_l) = 3$ untuk $n \geq 4$. Akibatnya dengan tiga warna, komponen P_l selalu dapat diwarnai. Oleh karena itu, dengan mengadopsi strategi permainan pada graf pot bunga, maka X dapat memenangkan permainan bilangan kromatik pada graf pohon palem $C_kP_lS_m$.

Jadi, bilangan kromatik permainan dari graf pohon palem $\chi_g(C_kP_lS_m) = 3$■



Gambar 7. Perumuman Graf Pohon Palem $C_kP_lS_m$

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga (C_mS_n) dan Graf Pohon Palem $(C_kP_lS_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.

3. Pembahasan

Graf pot bunga C_mS_n merupakan graf yang dikonstruksi dengan mengkaitkan dua graf yaitu graf lingkaran dan graf bintang dengan sebuah sisi pada salah satu titik pada graf lingkaran dengan titik pusat graf bintang. Sehingga komponen graf lingkaran memuat titik berderajat 3 dan komponen graf bintang derajat titik pusatnya bertambah 1. Oleh karena itu, strategi utama dari X adalah memastikan kedua titik tersebut terwarnai sebelum titik yang lainnya. Karena kedua titik tersebut bertetangga, maka dengan tiga warna, maka X selalu memiliki kesempatan untuk mewarnainya sebelum titik yang lain diwarnai. Awalnya, peneliti menduga bahwa strategi mewarnai pada tiap komponen dapat diterapkan dalam menentukan bilangan kromatik permianan pada graf pot bunga C_mS_n. Namun, dengan menggabungkan kedua komponen tersebut, terjadi perubahan struktur graf dari komponen-komponen pembentuknya. Sehingga strategi pada komponen tidak dapat diterapkan dalam menentukan bilangan kromatik permainan pada graf pot bunga C_mS_n.

Selanjutnya graf pohon palem $C_kP_lS_m$, untuk $l = 0$ graf pohon palem $C_kP_lS_m$, isomorfik dengan graf pot bunga C_kS_m. Graf pohon palem $C_kP_lS_m$ terdiri dari tiga komponen yaitu graf lingkaran C_k, graf lintasan P_l, dan graf bintang S_m. Oleh karena itu, dugaan awal peneliti, strategi memenangkan permainan pada graf pohon palem adalah menerapkan strategi permainan pada graf pot bunga. Karena strukturnya hampir identik dengan graf pot bunga, cukup memastikan komponen P_l terwarnai dengan warna yang disediakan serta menerapkan strategi permainan pada graf pot bunga C_mS_n.

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis hasil dan pembahasan penelitian, diperoleh beberapa kesimpulan berikut:

1. Struktur dan karakteristik graf menentukan strategi dalam memenangkan permainan mewarnai titk pada graf.
2. Strategi utama dari permainan mewarnai graf ini adalah memastikan titik-titik yang berderajat lebih dari warna yang disediakan terwarnai.
3. Bilangan kromatik permainan dari graf pot bunga C_mS_n sama dengan tiga.
4. Bilangan kromatik permainan dari graf pohon palem $C_kP_lS_m$ sama dengan tiga.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmad, M. (2012). Pelabelan graceful dan pelabelan ρ pada graf pot bunga dan graf pohon palem. Jakarta: *Tesis Universitas Indonesia*.

Bartnicki, T., Breˇsar, B., Grytczuk, J., Kovˇse, M., Miechowicz, Z., & Peterin, I. (2008). Game chromatic number of cartesian product graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 15 (1), 1–13.

Bodlaender, H. L. (1991). On the complexity of some coloring games. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2 (02), 133–147.

Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory with Applications*. (S. Axler & K. A. Ribet, Eds.). Springer.

Diestel, R. (2005). *Graph Teory* (Electronic). New York: Springer-Verlag Heidelberg.

Hartsfield, N., & Ringel, G. (2003). *Pearls in Graph Theory a Comprehensive Introduction*. New York: Dover Publication, Inc.

Mujib, A. (2011). Bilangan kromatik permainan pada beberapa graf hasil kali tensor. Bandung, Indonesia: *Tesis Institut Teknologi Bandung*.

Mujib, A., & Assiyatun, H. (2011). Game chromatic numbers of tensor product graphs. *In Interior* (pp. 1–8). Medan.

Dikirim: 17 Februari 2019; Direvisi: 28 Maret 2019; Diterima: 22 Maret 2019
Cara sitasi: Mujib, A. 2019. Bilangan Kromatik Permainan Graf Pot Bunga (C_mS_n) dan Graf Pohon Palem $(C_kP_lS_m)$. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*. Vol 4 No 1, Hal 13-22, Maret 2019.