

**Bilangan Kromatik-Total Hasil Operasi *SHACKLE* pada Graf Lintasan****Surya Darma<sup>1\*</sup>, Abdul Mujib<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup>Universitas Muslim Nusantara Al Washliyah, Jl. Garu II No.93, Sitirejo III Medan, IndonesiaEmail: [darmasuryaabufathar@gmail.com](mailto:darmasuryaabufathar@gmail.com)<sup>1</sup>, [mujib@umnaw.ac.id](mailto:mujib@umnaw.ac.id)<sup>2</sup>

\*Corresponding author

**ABSTRACT**

Total graph coloring is an important topic in graph theory that focuses on determining the minimum number of colors required to color both vertices and edges such that adjacent or incident elements receive different colors; however, studies on graphs resulting from the shackle operation remain limited. This study aims to determine the chromatic number and the total chromatic number of graphs obtained from the shackle operation on path graphs, denoted by  $Shack(P_n, P_n, \dots, P_n)$ . This research employs a deductive approach by utilizing established theorems and pattern analysis through the construction of particular cases to derive a general form. The results show that the chromatic number of the graph is  $\chi(Shack(P_n)) = 2$ , while the total chromatic number is  $\chi_T(Shack(P_n)) = 4$ . These results are obtained by constructing a valid total coloring and proving the minimality of the number of colors used. Therefore, this study contributes theoretically to the development of total graph coloring, particularly for graphs resulting from the shackle operation, and extends the understanding of total chromatic characteristics on path graph classes.

**Keywords:** Chromatic Number, Total Chromatic Number, Path Graph, Shackle Operation, Total Coloring**ABSTRAK**

Pewarnaan total graf merupakan salah satu topik penting dalam teori graf yang berfokus pada penentuan jumlah warna minimum untuk mewarnai titik dan sisi sehingga elemen yang saling bertetangga atau berinsiden memiliki warna berbeda, namun kajian pada graf hasil operasi *shackle* masih relatif terbatas. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik dan bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi *shackle* dari graf lintasan yang dinotasikan dengan  $Shack(P_n, P_n, \dots, P_n)$ . Penelitian ini menggunakan pendekatan deduktif melalui pemanfaatan teorema yang telah ada serta analisis pola melalui konstruksi kasus-kasus khusus untuk memperoleh bentuk umum. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bilangan kromatik graf tersebut adalah  $\chi(Shack(P_n)) = 2$ , sedangkan bilangan kromatik-totalnya adalah  $\chi_T(Shack(P_n)) = 4$ . Hasil ini diperoleh melalui konstruksi pewarnaan total yang valid serta pembuktian minimalitas jumlah warna yang digunakan. Temuan ini memberikan kontribusi teoretis dalam pengembangan kajian pewarnaan total graf hasil operasi, khususnya operasi *shackle*, serta memperluas pemahaman mengenai karakteristik bilangan kromatik-total pada kelas graf lintasan.

**Kata kunci:** Bilangan Kromatik, Bilangan Kromatik-Total, Graf Lintasan, Operasi *Shackle*, Pewarnaan Total

Dikirim: Mei 2025; Diterima: Juli 2025; Dipublikasikan: Maret 2026

Cara citasi: Darma, S. & Mujib, A. (2026). Bilangan Kromatik-Total Hasil Operasi *SHACKLE* pada Graf Lintasan. *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, 11(1), 89-98. DOI: <https://dx.doi.org/10.25157/teorema.v10i1.19050>.

## PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang telah berkembang sejak diperkenalkan oleh Euler pada tahun 1736 dan hingga kini terus mengalami perkembangan yang pesat. Awalnya teori graf digunakan untuk menyelesaikan permasalahan sederhana seperti teka-teki, namun saat ini telah banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang, seperti pencarian lintasan terpendek, permasalahan distribusi, komunikasi, transportasi, desain komputer, serta pemetaan (Bondy & Murty, 2008). Salah satu kajian penting dalam teori graf adalah pewarnaan graf, yaitu pemberian warna pada elemen graf (titik, sisi, atau keduanya) dengan syarat elemen yang saling berhubungan tidak memiliki warna yang sama.

Minimum banyak warna yang digunakan untuk memperoleh sebuah pewarnaan-total pada graf  $G$  disebut bilangan kromatik-total  $G$ , dilambangkan dengan  $\chi_T(G)$ . Sebelumnya telah dilakukan penelitian tentang bilangan kromatik-total beberapa kelas graf oleh Sulistya (2019). Beberapa graf dapat menghasilkan bentuk yang baru jika menggunakan operasi tertentu. Dua buah graf dapat dioperasikan dengan bermacam-macam operasi, antara lain operasi joint ( $G + H$ ), darab Cartesius ( $G \times H$ ), darab korona ( $G \odot H$ ), darab tensor ( $G \otimes H$ ), komposisi ( $G[F]$ ), dan Amalgamation (Utari, 2019). Selain operasi-operasi tersebut, terdapat operasi yang lainnya yaitu operasi *shackle*. Sehingga dalam tulisan ini akan dilakukan penelitian lebih lanjut tentang bilangan kromatik-total yaitu bilangan kromatik-total hasil operasi graf. Operasi yang digunakan adalah operasi *Shackle*.

Operasi *shackle* adalah operasi antara dua atau lebih graf yang menghasilkan graf baru. Definisi (Maryati *et al.*, 2010) : Jika  $k \geq 2$  adalah bilangan bulat, didefinisikan *Shackle* sebagai konstruksi graf dengan graf non-trivial terhubung  $G_1, G_2, \dots, G_k$  sehingga  $G_s$  dan  $G_t$  tidak memiliki titik simpul yang sama untuk setiap  $s, t \in [1, k]$  dengan  $|s - t| \geq 2$  dan setiap  $i \in [1, k - 1]$   $G_i$  dan  $G_{i+1}$  mempunyai tepat satu titik simpul yang sama disebut *linkage vertex* (penghubung simpul) dan  $k - 1$  *linkage vertex* berbeda. Graf *Shackle* dinotasikan dengan  $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$ . Misalkan  $\{G_i | i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}\}$  untuk  $k \in \mathbb{N}$  dan  $k \geq 2$ , merupakan kumpulan graf berhingga dengan titik tetap masing-masing adalah  $u_i$  dan  $v_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ , dinotasikan  $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k: v_j = u_{j+1}; j = 1, 2, \dots, k)$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(Shack(G_1, G_2, \dots, G_k: v_j = u_{j+1}; j = 1, 2, \dots, k)) = V(G_1) \cup V(G_2 \setminus v^1) \cup V(G_3 \setminus v^1) \cup \dots \cup V(G_k \setminus v^k)$  dan himpunan sisi  $E(Shack(G_1, G_2, \dots, G_k: v_j = u_{j+1}; j = 1, 2, \dots, k)) = \bigcup_{i=1}^k E(G_i)$ .

Kajian mengenai bilangan kromatik-total dalam teori graf tidak terlepas dari *Total Coloring Conjecture* yang diperkenalkan oleh Behzad (1965) dan dikembangkan oleh Vizing (1968), yang menyatakan bahwa untuk setiap graf  $G$  berlaku  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ . Konjektur ini menjadi dasar dalam berbagai penelitian terkait pewarnaan total graf hingga saat ini. Seiring perkembangannya, penelitian mengenai bilangan kromatik-total telah dilakukan pada berbagai kelas graf, baik graf sederhana maupun graf khusus. Sebagai contoh, Wang dan Wu (2020) mengkaji pewarnaan total pada beberapa graf khusus, sedangkan Zhao dan Zhang (2021) meneliti batas bilangan kromatik-total pada graf dengan derajat terbatas. Hasil-hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa struktur graf memiliki pengaruh yang signifikan terhadap nilai bilangan kromatik-total yang diperoleh.

Selain itu, perkembangan penelitian juga mengarah pada kajian pewarnaan total pada graf hasil operasi. Sun dan Wang (2022) meneliti bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi produk korona, sedangkan Li dan Zhou (2023) mengkaji pewarnaan total pada berbagai graf hasil operasi produk dan aplikasinya. Kajian mengenai operasi graf secara umum juga telah dibahas secara komprehensif dalam literatur seperti yang disampaikan oleh Hammack *et al.* (2011), yang menjelaskan berbagai jenis operasi graf dan karakteristiknya. Hal ini menunjukkan bahwa operasi graf memberikan kontribusi penting dalam menghasilkan struktur graf baru dengan sifat-sifat yang lebih kompleks.

Meskipun demikian, sebagian besar penelitian yang ada masih berfokus pada graf hasil operasi standar seperti produk graf, sementara kajian mengenai bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi *shackle* masih sangat terbatas. Padahal, operasi *shackle* memiliki karakteristik khusus dalam menghubungkan beberapa graf melalui titik tertentu yang berpotensi menghasilkan pola pewarnaan yang berbeda dibandingkan operasi graf lainnya (Maryati *et al.*, 2010). Oleh karena itu,

penelitian ini menjadi penting untuk mengkaji bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi *shackle*, khususnya pada graf lintasan, guna mengisi kesenjangan penelitian yang masih ada serta memperkaya kajian dalam teori pewarnaan graf.

Meskipun penelitian mengenai bilangan kromatik-total telah cukup berkembang, kajian yang secara khusus membahas bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi *shackle* masih sangat terbatas. Sebagian besar penelitian sebelumnya lebih berfokus pada graf dasar atau operasi graf lainnya, sehingga belum memberikan gambaran mengenai perilaku bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi *shackle*, khususnya pada kelas graf lintasan. Hal ini menunjukkan adanya kesenjangan penelitian (*research gap*) yang perlu dikaji lebih lanjut.

Berdasarkan hal tersebut, penelitian ini difokuskan pada penentuan bilangan kromatik-total dari graf hasil operasi *shackle* pada graf lintasan  $P_n$ . Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh nilai bilangan kromatik-total serta bentuk umum yang dihasilkan dari operasi tersebut. Kontribusi penelitian ini adalah memberikan hasil baru berupa penentuan bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi *shackle* untuk kelas graf lintasan, yang diharapkan dapat memperkaya kajian teori graf, khususnya dalam bidang pewarnaan total dan operasi graf.

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang telah ada sejak lebih dari dua ratus tahun silam. Jurnal teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan terkenal Swiss bernama Euler pada tahun 1736. Awalnya teori graf “kurang” signifikan dari segi matematika karena kebanyakan dipakai untuk memecahkan teka-teki (*puzzle*), namun beberapa puluh tahun terakhir ini mengalami perkembangan yang sangat pesat.

Teori graf telah mengalami perkembangan yang pesat karena dalam kehidupan sehari-hari dapat menerapkan teori graf. Misal untuk mencari lintasan terpendek, permasalahan tukang pos dalam mengirim surat, komunikasi, transportasi, desain computer, perlokasian dan lainnya (Bondy & Murty, 2008). Salah satu materi pada teori graf yang sangat penting adalah pewarnaan pada graf. Pewarnaan sejati dari graf yaitu memberikan warna ke titik atau sisi atau keduanya (total) sedemikian hingga elemen (titik atau sisi atau keduanya) terdekat diwarnai dengan warna yang berbeda.

## METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kualitatif yaitu dengan prinsip-prinsip pembuktian secara deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Adapun mengenai teorema yang disusun harus dibuktikan melalui proses deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum. Pada penelitian ini akan diperoleh teorema-teorema ataupun definisi-definisi baru yang diperoleh dari hasil analisis lebih lanjut terhadap teorema-teorema ataupun definisi-definisi sebelumnya yang telah ada. Penelitian ini pada prosesnya juga menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yaitu dengan melakukan operasi dua buah graf pada kasus-kasus kecil untuk mendapatkan pola bilangan kromatiknya sebagai langkah awal untuk mendapatkan generalisasi bilangan kromatik total.

Adapun waktu penelitian ini direncanakan akan dilaksanakan pada Tahun Ajaran 2024-2025. Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur dimana untuk menyelesaikan persoalan yang akan diteliti dengan menelusuri sumber-sumber tulisan yang pernah dibuat sebelumnya. Dan beberapa sumber pustaka yang dapat digunakan sebagai pendukung dalam penelitian ini seperti buku – buku, jurnal ilmiah terakreditasi, dan hasil penelitian seperti skripsi, tesis atau disertasi.

Penelitian ini juga merupakan studi literatur yang didukung oleh berbagai sumber pustaka seperti buku, jurnal ilmiah, serta hasil penelitian terdahulu yang relevan dengan topik pewarnaan total graf dan operasi graf (Bondy & Murty, 2008; Maryati *et al.*, 2010; Utari, 2019). Selain itu, untuk mengeksplor lebih jauh, peneliti juga menggunakan *tools Sketchpad 5.06* untuk mengeksplorasi bentuk-bentuk graf yang dihasilkan melalui operasi *Shackle* pada graf  $\chi_T(Shack(P_n))$ .

Adapun prosedur penelitian dilakukan melalui tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Analisis struktur graf lintasan  $P_n$   
Mengkaji karakteristik dasar graf lintasan, meliputi himpunan titik, himpunan sisi, serta derajat setiap titik sebagai dasar dalam proses pewarnaan graf.
2. Pembentukan graf hasil operasi *shackle*  
Mengonstruksi graf baru melalui operasi *shackle* terhadap beberapa graf lintasan  $P_n$ , dengan memperhatikan titik penghubung (*linkage vertex*) sesuai definisi yang digunakan (Maryati *et al.*, 2010).
3. Identifikasi karakteristik graf hasil operasi  
Menentukan sifat-sifat graf hasil operasi, seperti kardinalitas titik dan sisi, serta derajat minimum dan maksimum, sebagai dasar dalam menentukan batas pewarnaan.
4. Identifikasi pola pewarnaan  
Melakukan eksplorasi pada beberapa kasus khusus (nilai kecil dari  $n$ ) untuk menemukan pola pewarnaan total yang memenuhi syarat. Tahapan ini menggunakan pendekatan *pattern recognition* untuk memperoleh dugaan bentuk umum bilangan kromatik-total.
5. Perumusan dugaan (konjektur)  
Berdasarkan pola yang ditemukan, dirumuskan konjektur mengenai nilai bilangan kromatik-total graf hasil operasi *shackle* pada graf lintasan.
6. Pembuktian teorema secara deduktif  
Konjektur yang diperoleh kemudian dibuktikan secara matematis menggunakan metode deduktif, sehingga diperoleh hasil yang sah dan berlaku umum.

Dengan tahapan tersebut, penelitian ini menghasilkan teorema mengenai bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi *shackle* yang dibangun dari graf lintasan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Struktur dan karakteristik graf lintasan pada Operasi *Shackle*  
*Shack* ( $P_n, v_i, m$ ) merupakan graf hasil operasi *shackle* terhadap graf lintasan ( $P_n$ ). Dimana  $m$  copy graf  $P_n$  dan setiap titik copy graf  $P_n$  dihubungkan dengan titik ke- $i$  anggota titik graf  $P_n$ . Berikut grafik perumuman dari graf *Shack* ( $P_n, v_i, n$ ). Misalkan  $P_n$  adalah graf lintasan dengan himpunan titik

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

dan himpunan sisi

$$E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\}.$$

Selanjutnya dibentuk graf hasil operasi *shackle* dari  $k$  buah graf lintasan  $P_n$ , yang dinotasikan dengan

$$G = Shack(P_n, P_n, \dots, P_n).$$

Untuk mempermudah analisis, setiap salinan graf lintasan dinotasikan sebagai  $P_n^{(j)}$  dengan  $j = 1, 2, \dots, k$ . Titik pada salinan ke- $j$  dinotasikan sebagai  $v_i^{(j)}$ , dengan  $1 \leq i \leq n$ .

Operasi *shackle* dilakukan dengan mengidentifikasi titik ujung, yaitu:

$$v_n^{(j)} = v_1^{(j+1)}, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Dengan demikian:

- Banyak titik pada graf  $G$  adalah:

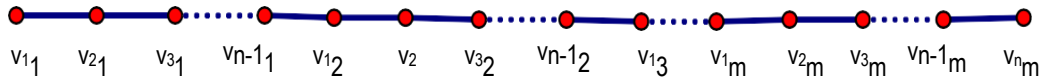
$$|V(G)| = kn - (k - 1),$$

- Banyak sisi:

$$|E(G)| = k(n-1).$$

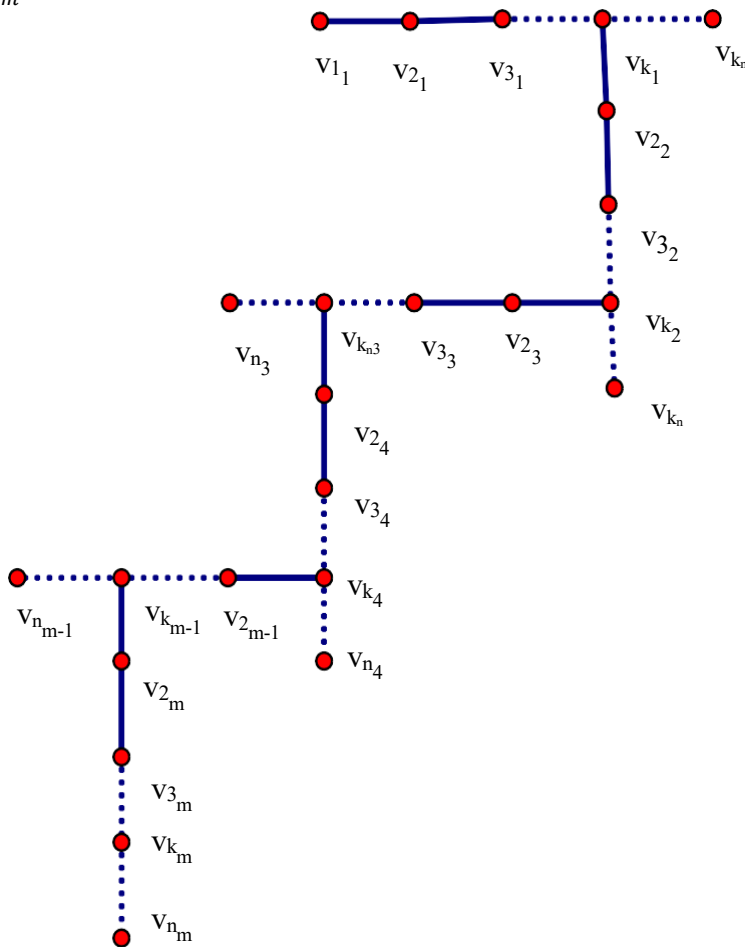
Derajat titik pada graf  $G$  memenuhi:

- Derajat minimum  $\delta(G) = 1$  (pada titik ujung),
- Derajat maksimum  $\Delta(G) = 2$  (pada titik internal).



**Gambar 1.**  $Shack(P_n, v_i, m); v_i = v_{1_1}$

Berdasarkan gambar diperoleh beberapa karakteristik dari graf  $Shack(P_n, v_n, m)$ . Misalkan himpunan titik  $V = \{v_i: i = 1, 2, 3, \dots, n\}$  terdapat hubungan pada setiap copyan pada graf  $P_n$  yang di copy sebanyak  $m$  kali, yaitu  $v_{n_1} = v_{1_2}; v_{n_2} = v_{1_3}; v_{n_3} = v_{1_4}$  dan seterusnya hingga  $v_{n_m} = v_{n-1_m}$  dimana hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai bentuk  $v_{n_i} = v_{1_{i+1}}$ . Oleh karena itu, kardinalitas titik  $|X_{Shack(P_n, v_n, m)}| = (n-1)m + 1$ . Selanjutnya himpunan sisi  $E = \{e_i: i = 1, 2, 3, \dots, n\}$  sehingga kardinalitas sisi  $|E_{Shack(P_n, v_n, m)}| = m(n-1)$ . Kemudian derajat terkecil dari graf  $Shack(P_n, v_n, m)$  adalah  $\delta(Shack(P_n, v_n, m)) = 1$ . Hal ini dapat di lihat pada  $v_{1_1}$  dan  $v_{n_m}$ . Sedangkan derajat terbesar dari graf  $Shack(P_n, v_n, m)$  adalah  $\Delta(Shack(P_n, v_n, m)) = 2$ , yaitu selain  $v_{1_1}$  dan  $v_{n_m}$ .



**Gambar 2.**  $Shack(P_n, v_i, m); v_{2_1} \leq v_i < v_{n-1_m}$

Berdasarkan gambar tanpa mengurangi keumuman, yaitu  $v_i = v_k$ , diperoleh beberapa karakteristik dari graf  $(P_n, v_k, m)$  untuk  $2 \leq v_i < n-1$ . Misalkan himpunan titik  $X =$

$\{v_{(k,i)} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, i = k\}$  yang akan di copy sebanyak  $m$  kali. Sehingga di dapat kardinalitas titik  $|X_{Shack(P_n, v_k, m)}| = (n - 1)m + 1$ . Selanjutnya himpunan sisi  $E = \{e_{(k,i)} = (v_{(i,k)}v_{(i,k+1)}) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, k = n\}$ . sehingga kardinalitas sisi  $|E_{Shack(P_n, v_k, m)}| = m(n - 1)$ . Kemudian derajat terkecil dari graf *Shack*  $(P_n, x_n, m)$  adalah  $\delta(Shack(P_n, v_n, m)) = 1$ . Hal ini dapat di lihat pada  $v_{1_1} = v_{n_1} = v_{n_2} = \dots = v_{n_m}$ . Sedangkan derajat terbesar dari graf *Shack*  $(P_n, v_n, m)$  adalah  $\Delta(Shack(P_n, v_n, m)) = 3$ , untuk  $v_{k_i}$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ . Gambar 1 dan Gambar 2 menunjukkan ilustrasi konstruksi graf hasil operasi *shackle*, di mana setiap graf lintasan dihubungkan melalui satu titik penghubung (*linkage vertex*). Struktur ini menjadi dasar dalam menentukan pola pewarnaan graf.

2. Bilangan kromatik graf lintasan hasil operasi *Shackle*

### Teorema 1:

$$\chi(Shack(P_n, v_i, m)) = 2$$

Bilangan kromatik graf lintasan hasil operasi *shackle* adalah:

$$\chi(G) = 2.$$

**Bukti:**

Graf lintasan  $P_n$  merupakan graf bipartit, sehingga dapat diwarnai menggunakan dua warna. Misalkan digunakan dua warna, yaitu warna 1 dan warna 2.

Definisikan pewarnaan titik:

$$c(v_i^{(j)}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \text{ ganjil,} \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap.} \end{cases}$$

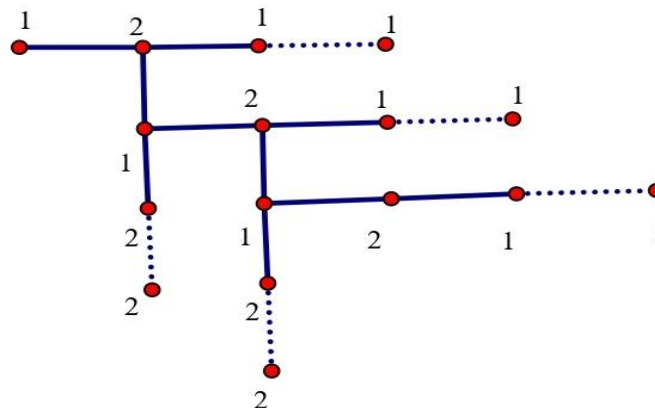
Karena setiap sisi menghubungkan dua titik bertetangga  $v_i^{(j)}$  dan  $v_{i+1}^{(j)}$ , maka kedua titik tersebut selalu memiliki warna berbeda. Pada titik penghubung  $v_n^{(j)} = v_1^{(j+1)}$ , pewarnaan tetap konsisten karena pola ganjil-genap tetap terjaga. Dengan demikian, graf  $G$  dapat diwarnai dengan dua warna, sehingga:

$$\chi(G) \leq 2.$$

Karena graf memiliki sisi, maka diperlukan minimal dua warna, sehingga:

$$\chi(G) = 2.$$

Graf  $Shack(P_n, v_i, m)$  mempunyai struktur graf sebagai berikut



**Gambar 3.** Pewarnaan pada Titik  $Shack(P_n, v_i, m)$

Pada gambar  $\Delta(Shack(P_n, v_i, m)) = 3$ , maka  $Shack(P_n, v_i, m)$  merupakan pewarnaan-3, sehingga  $Shack(P_n, v_i, m) \leq 3$ . Misalkan diberikan 2 warna untuk titik  $d(x_i) = 1$ , dapat diberikan 2 warna karena setiap dua titik yang berhubungan langsung dan setiap titik yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Untuk titik  $(x_i) = 2$ , pasti dapat diwarnai dengan 2 warna dan dua titik yang bertetangga saling lepas dan dapat diberi warna dengan warna yang sama. Sedangkan untuk  $d(x_i) = 3$ , juga dapat diwarnai dengan 2 warna dan tiga titik yang bertetangga saling lepas maka dapat diwarnai dengan warna yang sama sehingga untuk  $\chi(Shack(P_n, v, m))$  minimum warna yang dibutuhkan adalah 2.

3. Bilangan kromatik total graf hasil operasi *Shackle*

**Teorema 2:**

$$\chi_T(Shack(P_n, v_i, m)) = 4$$

Bilangan kromatik-total graf lintasan hasil operasi *shackle* adalah:

$$\chi_T(G) = 4$$

**Bukti:**

Pembuktian dilakukan dalam dua tahap, yaitu menunjukkan bahwa:

1.  $\chi_T(G) \leq 4$  (konstruksi pewarnaan)
2.  $\chi_T(G) \geq 4$  (batas bawah)

**(i) Batas Atas:  $\chi_T(G) \leq 4$**

Didefinisikan fungsi pewarnaan total  $c$  sebagai berikut:

**Pewarnaan titik:**

$$c(v_i^{(j)}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \text{ ganjil,} \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap.} \end{cases}$$

**Pewarnaan sisi:**

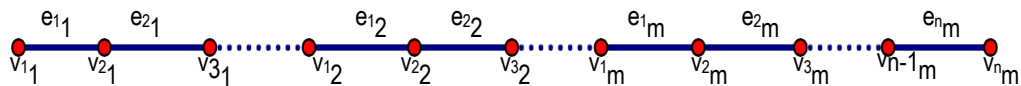
Untuk setiap sisi  $e_i^{(j)} = v_i^{(j)} v_{i+1}^{(j)}$ , diberikan:

$$c(e_i^{(j)}) = \begin{cases} 3, & \text{jika } i \text{ ganjil,} \\ 4, & \text{jika } i \text{ genap.} \end{cases}$$

**Verifikasi:**

- Dua titik bertetangga memiliki warna berbeda (1 dan 2)
- Dua sisi yang bersisian memiliki warna berbeda (3 dan 4)
- Setiap sisi memiliki warna berbeda dengan kedua titik ujungnya

Sehingga pewarnaan valid dengan 4 warna.

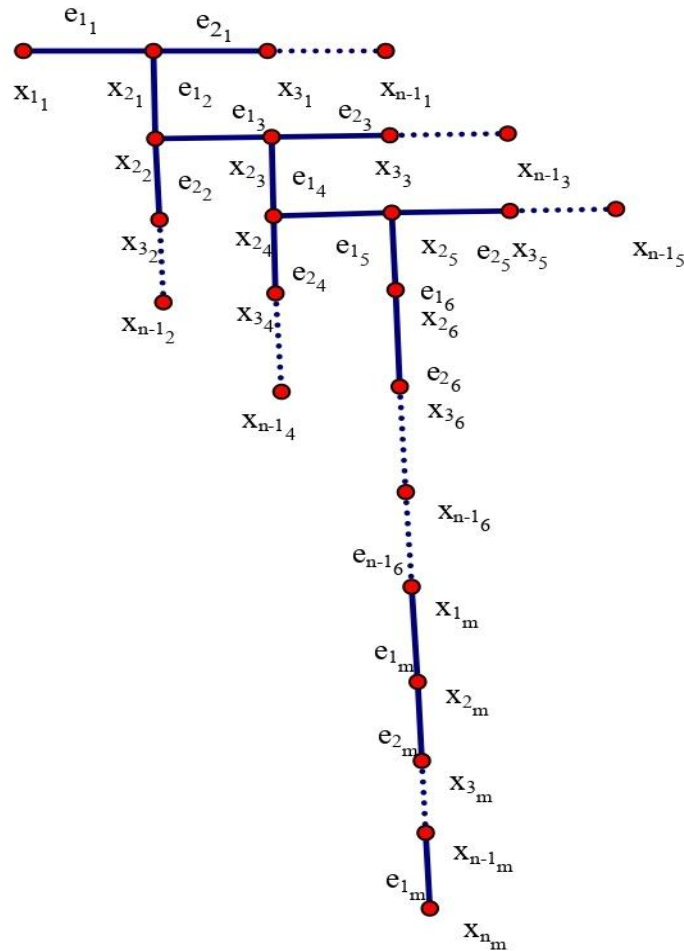


**Gambar 4.**  $\chi_T(Shack(P_n, v_i, m)); v_i = v_{1_1}$

Konstruksi pewarnaan total pada  $Shack(P_n, v_i, m)$  sebagai berikut,  $Shack(P_n, v_i, m)$  mempunyai himpunan titik  $X = \{v_{(j,i)}: 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m, k = n\}$ , jadi untuk pewarnaan pada titik  $v_{1_1} = v_{3_1} = v_{1_2} = v_{3_2} = v_{1_m} = v_{3_m} = v_{n-1_m}$  dapat diberi warna 1. Untuk pewarnaan pada titik  $v_{2_1} = v_{2_2} = v_{2_m} = v_{n_m}$  dapat diberi warna 2. Sedangkan untuk



himpunan sisi =  $\{e_{(j,k)} = (v_{(j,k)}v_{(j,k+1)}): 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m, k = 1, n\}$ , jadi untuk pewarnaan pada sisi  $e_{1_1} = e_{1_2} = e_{1_m} = e_{n_m}$  dapat diberi warna 3. Untuk pewarnaan pada titik  $e_{2_1} = e_{2_2} = e_{2_m}$  dapat diberi warna 4. Jadi, untuk pewarnaan total  $\chi_T(\text{Shack}(P_n, v_i, m)) = 4$



**Gambar 5.**  $\chi_T(\text{Shack}(P_n, v_i, m)); v_{2_1} \leq v_i < v_{n-1_m}$

Untuk pewarnaan pada titik  $v_{1_1} = v_{3_1} = v_{2_3} = v_{3_4} = v_{2_6} = v_{n-1_1} = v_{n-1_4} = v_{1_m} = v_{3_m} = v_{n-1_m}$  dapat diberi warna 1. Pada titik  $v_{2_1} = v_{3_2} = v_{2_4} = v_{3_5} = v_{n-1_2} = v_{n-1_5} = v_{2_m} = v_{n_m}$  diberi warna 2. Titik  $v_{2_2} = v_{3_3} = v_{2_5} = v_{3_6} = v_{n-1_3} = v_{n-1_6}$  diberi warna 3. Sedangkan pewarnaan pada sisi  $e_{1_1} = e_{1_4} = e_{1_m} = e_{n_m}$  diberi warna 3. Pada sisi  $e_{2_1} = e_{2_2} = e_{2_3} = e_{2_4} = e_{2_5} = e_{2_6} = e_{2_m}$  dapat diberi warna 4 dan sisi  $e_{1_2} = e_{1_5}$  warna 1 serta sisi  $e_{1_3} = e_{1_6}$  diberi warna 2. Jadi, untuk pewarnaan total  $\chi_T(\text{Shack}(P_n, v_i, m)) = 4$ . Jadi, dari bentuk perumuman untuk  $v_i = v_{1_1}$  atau  $v_i = v_{n_m}$  dan  $v_{2_1} \leq v_i < v_{n-1_m}$  dapat disimpulkan bahwa  $\chi_T(\text{Shack}(P_n, v_i, m)) = 4$ .

Gambar 3, Gambar 4, dan Gambar 5 menunjukkan contoh konstruksi pewarnaan total pada graf hasil operasi *shackle*.

- Gambar digunakan untuk memverifikasi pola pewarnaan.
  - Pola yang tampak pada gambar menjadi dasar generalisasi dalam pembuktian teorema.
- Dengan demikian, gambar tidak hanya bersifat ilustratif, tetapi juga mendukung proses identifikasi pola dan validasi hasil pembuktian.



Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Pemanfaatan teori graf misalnya terdapat pada penerapan algoritma pada lampu lalu lintas, penyusunan jadwal, pemetaan (*google maps*) dan masih banyak lagi yang bisa kita temui. Penentuan bilangan kromatik total juga merupakan salah satu implementasi dari teori graf. Hal ini dapat dilakukan untuk mencari berapa banyak warna minimum yang dapat digunakan untuk bisa mewarnai setiap titik dan simpul yang dapat divisualisasikan dalam sebuah gambar, tempat ataupun lokasi tertentu.

Hasil penelitian ini sejalan dengan teori umum pewarnaan total graf yang menyatakan bahwa nilai bilangan kromatik-total dipengaruhi oleh derajat maksimum graf. Dalam hal ini, hasil yang diperoleh juga konsisten dengan batas yang diberikan dalam *Total Coloring Conjecture* (Behzad, 1965; Vizing, 1968). Selain itu, pola pewarnaan yang diperoleh menunjukkan kemiripan dengan hasil penelitian sebelumnya pada graf hasil operasi lainnya, seperti produk korona (Sun & Wang, 2022) maupun produk graf secara umum (Li & Zhou, 2023), di mana struktur graf hasil operasi memengaruhi kompleksitas pewarnaan.

Lebih lanjut, hasil ini memperkuat temuan bahwa graf hasil operasi memiliki karakteristik pewarnaan yang berbeda dibandingkan graf dasar, sebagaimana juga dikemukakan dalam penelitian Wang dan Wu (2020) serta Zhao dan Zhang (2021). Dengan demikian, penelitian ini memberikan kontribusi tambahan dalam memahami perilaku bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi yang belum banyak dikaji, khususnya pada operasi *shackle*.

## KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil menentukan bilangan kromatik dan bilangan kromatik-total pada graf hasil operasi *shackle* yang dibangun dari graf lintasan  $P_n$ . Diperoleh bahwa bilangan kromatik graf tersebut adalah  $\chi(G) = 2$ , sedangkan bilangan kromatik-totalnya adalah  $\chi_T(G) = 4$ . Hasil ini diperoleh melalui analisis struktur graf, identifikasi pola pewarnaan pada kasus khusus, serta pembuktian secara deduktif untuk memperoleh bentuk umum.

Dalam penentuan bilangan kromatik total dari kelas graf lintasan ( $P_n$ ) dapat dilakukan dengan memperhatikan struktur dan juga karakteristik dari *Shack* ( $P_n, v_i, m$ ), dan juga bilangan kromatik pada  $\chi(\text{Shack}(P_n, v_i, m))$ . Dengan demikian diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Bilangan kromatik dari kelas graf lintasan ( $P_n$ ) pada operasi *Shackle* yang dinotasikan  $\chi(\text{Shack}(P_n, v_i, m))$  diperoleh :  

$$\chi(\text{Shack}(P_n, v_i, m)) = 2, n \geq 2$$
2. Bilangan kromatik total dari kelas graf lintasan ( $P_n$ ) pada operasi *Shackle* yang dinotasikan  $\chi_T(\text{Shack}(P_n, v_i, m))$  diperoleh :  

$$\chi_T(\text{Shack}(P_n, v_i, m)) = 4$$

## REKOMENDASI

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, beberapa rekomendasi yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut. Pertama, penelitian ini masih terbatas pada graf lintasan, sehingga kajian lanjutan dapat dilakukan dengan menerapkan operasi *shackle* pada kelas graf lain, seperti graf siklus, graf bintang, atau graf lengkap, untuk melihat perbandingan perilaku bilangan kromatik-total yang dihasilkan. Kedua, penelitian selanjutnya dapat mengkaji bilangan kromatik-total pada variasi operasi graf lainnya atau kombinasi beberapa operasi graf untuk memperoleh struktur graf yang lebih kompleks.

Selain itu, pengembangan juga dapat diarahkan pada jenis pewarnaan graf yang lain, seperti pewarnaan sisi, pewarnaan titik, maupun pewarnaan khusus lainnya, sehingga dapat diperoleh generalisasi yang lebih luas dalam teori pewarnaan graf. Penelitian lebih lanjut juga dapat mengkaji

keterkaitan antara struktur graf hasil operasi dengan batas atas dan batas bawah bilangan kromatik-total secara lebih umum.

Dengan adanya pengembangan tersebut, diharapkan kajian mengenai pewarnaan graf, khususnya pada graf hasil operasi *shackle*, dapat semakin berkembang dan memberikan kontribusi yang lebih luas dalam bidang teori graf.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Behzad, M. (1965). *Graphs and their chromatic numbers*. Doctoral dissertation, Michigan State University.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory with Applications*. (S.Axler&K.A.Ribet;Eds).Springer
- Hammack, R., Imrich, W., & Klavžar, S. (2011). *Handbook of product graphs*. CRC Press.
- Maryati, T.K., Salman, A.N.M., Baskoro, E. T, Ryan, J., & Miller, M. (2010). *On H- supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph*. *Utilitas Mathematica*, 83(October 2016), 333-342
- Mujib.A. (2011). *Characteristics of shackle graph :  $Shack(K_n, v_{(j,i)}, t)$ ,  $Shack(C_n, v_{(j,i)}, t)$ , &  $Shack(K_{(n,m)}, v_{(rj,1)}, t)$* . *Axiom*(Februari 2021): 125-132
- Li, X., & Zhou, S. (2023). Total coloring of product graphs and its applications. *Journal of Combinatorial Optimization*, 45, 1–15.
- Sun, Y., & Wang, L. (2022). Total coloring of corona product graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 308, 1–10.
- Utari, A. (2019). *Bilangan Kromatik Graf Hasil Operasi dan Aplikasinya Pada Permainan Pewarnaan Graf*. 45(45), 95–98.
- Vizing, V. G. (1968). Some unsolved problems in graph theory. *Russian Mathematical Surveys*, 23(6), 125–141.
- Wang, W., & Wu, J. (2020). Total coloring of some special graphs. *Discrete Mathematics*, 343(5), 111800.
- Zhao, Y., & Zhang, L. (2021). On total coloring of graphs with bounded degree. *Graphs and Combinatorics*, 37(2), 345–356.