

Aplikasi Super Edge-Magic Total Labeling Graph 4-Cycle Book pada Pembentukan Bahasa Sandi

Aisyah Enggel Luthfiah¹, Sivi Hersiana², Aisa Juniarti³, Mutiara Pratiwi⁴,
Baki Swita⁵, Rahmat Mursalim⁶, Sigit Nugroho⁷, Mudin Simanihuruk^{8*}

^{1,2,3,4,5,6,7,8}Universitas Bengkulu, Jalan W.R. Supratman, Kandang Limun, 38371, Indonesia

E-mail: ¹aisyahenggel12@gmail.com, ²sivihestiana321@gmail.com, ³aisajuniarti736@gmail.com, ⁴muttia7@gmail.com,
⁵switabaki@gmail.com, ⁶rahmatnursalim@unib.ac.id, ⁷snugroho@unib.ac.id, ^{8*}mudinsimanihuruk@unib.ac.id,

*Corresponding author

ABSTRACT

The determination of a *super edge-magic total labeling* for graphs $CB(4, a, 2)$ is an open problem for $a \equiv 5 \pmod{8}$. Therefore, the *super edge-magic total labeling* graphs $CB(4, a, 2)$, can be used for encryption and decryption of secrete language in cryptography, making the confidentiality of information difficult to break by hackers. Hence the research problem is wether the graphs $CB(4, a, 2)$ possesses a *super ege-magic total labeling* for all $a \equiv 5 \pmod{8}$. Thus the aim of this article is to find a *super ege-magic total labeling* for all $a \equiv 5 \pmod{8}$. This article show that the graphs $CB(4, a, 2)$ indeed has a *super ege-magic total labeling* for $a \equiv 5 \pmod{8}$, $a = 125, 133$ and 141 . We prove these by modus ponens or modus tollens methods. The *super edge-magic total labeling* graphs $CB(4, 125, 2)$ is then used to construct a chiper language using the Rivest Shamir Adleman (RSA) algorithm, implemented in Python programming language.

Keywords: $CB(4, a, 2)$ Graph, Modulo 8 Congruence, RSA Algorithm, Python, Super Edge-Magic Total Labeling

ABSTRAK

Penentuan *super edge-magic total labeling* dari graphs $CB(4, a, 2)$ adalah *open problem* untuk $a \equiv 5 \pmod{8}$. Oleh karena itu *super edge-magic total labeling* dari graphs $CB(4, a, 2)$ dapat digunakan untuk mengenkripsi (encrytion) dan mendekripsi (decryption) bahasa rahasia dalam kriptografi sehingga kerahasiaan informasi sulit dibongkar para hacker. Jadi permasalahan penelitian ini adalah apakah graphs $CB(4, a, 2)$ memiliki *super edge-magic total labeling* untuk semua $a \equiv 5 \pmod{8}$. Jadi tujuan penelitian ini adalah mencari *super edge-magic total labeling* untuk semua $a \equiv 5 \pmod{8}$. Hasil artikel ini menunjukkan bahwa graphs $B(4, a, 2)$ memiliki *super edge-magic total labeling* untuk $a \equiv 5 \pmod{8}$, $a = 125, 133$ dan 141 . Hasil ini dibuktikan dengan metode modus ponens atau modus tollens. *Super edge-magic total labeling* graphs $CB(4, 125, 2)$ digunakan untuk mengkonstruksi bahasa sandi dengan menggunakan algoritma Rivest Shamir Adleman (RSA) yang diimplementasikan dalam pemograman Python.

Kata kunci: Graf $CB(4, a, 2)$, Kongruensi Modulo 8, Kriptografi RSA Algorithm, Python, Super Edge-Magic Total Labeling

Dikirim: Oktober 2025; Diterima: Desember 2025; Dipublikasikan: Maret 2026

Cara citasi: Luthfiah, A. E., Hersiana, S., Juniarti, A., Pratiwi, M., Swita, B., Mursalim, R., Nugroho, S., Simanihuruk, M. (2026). Aplikasi Super Edge-Magic Total Labeling Graph 4-Cycle Book pada Pembentukan Bahasa Sandi. *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, 11(1), 115–128. DOI: [10.25157/teorema.v11i1.21717](https://doi.org/10.25157/teorema.v11i1.21717).

This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license



PENDAHULUAN

Beberapa peneliti telah menggunakan edge magic total labeling untuk keamanan pertukaran data dan informasi melalui enkripsi dan deskripsi informasi. Edge-magic total labeling dari *graph* memiliki aplikasi dalam teknologi informasi. Imran *et al.* (2014) meneliti dan mengaplikasikan edge-magic total labeling dari *graph* Caterpillar untuk membentuk password rahasia antara kasir dan supervisor pada supermarket. Triyani *et al.* (2013) meneliti dan mengaplikasikan edge-magic total labeling dari *regular-graph* Caterpillar untuk membentuk password rahasia antara karyawan dan Pembantu Dekan I Fakultas Sains dan Teknik Unsoed. Aplikasi yang sangat luas dari edge-magic total labeling dari *graph* dan tantangan matematis dalam menyelesaikannya menyebabkan edge-magic total labeling dari *graph* menjadi perhatian para peneliti sampai saat ini. Selain itu Jegan *et al.* (2022) menggunakan super edge-magic total labeling dari extended duplicate graph untuk mengkonstruksi enkripsi dan deskripsi dari suatu informasi.

Pada penelitian ini akan diberikan ilustrasi bagaimana menggunakan super edge-magic total labeling dari *graphs* $CB(4, a, 2)$ untuk enkripsi dan deskripsi informasi dengan menggunakan algoritma Rivest Shamir Adleman (RSA). Dengan menggunakan super edge-magic total labeling dari *graphs* $CB(4, a, 2)$ sebagai input pada algoritma RSA akan mempersulit para hacker untuk mendeskripsi bahasa rahasia karena super edge-magic total labeling dari suatu *graph* sulit ditemukan. Untuk itu diperlukan definisi *graphs* $CB(4, a, 2)$ dan super edge-magic total labelling.

Marr and Wallis (2013) mendefinisikan bahwa *graphs* $CB(m, a, t)$, singkatan dari *m-cycle-book*, adalah *graph* yang terdiri dari a salinan lingkaran C_m dengan irisan edge semua lingkaran adalah *path* P_t . Misal G adalah *graph* dengan himpunan *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edges* $E(G)$. Secara matematis, edge-magic total labeling pada G adalah suatu fungsi bijektif $\lambda: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \alpha + \beta\}$ di mana $\alpha = |V(G)|$ dan $\beta = |E(G)|$ sehingga berlaku $\lambda(x) + \lambda(x, y) + \lambda(y) = k, \forall (x, y) \in E(G)$. Bilangan konstan k disebut *magic constant*. *Graph* yang mempunyai edge-magic total labeling disebut *edge magic*. Edge-magic total labeling pada suatu *graph* G dikatakan *super edge-magic total labeling* bila label *vertex* dari G adalah himpunan $\{1, 2, 3, \dots, \alpha\}$.

Super edge-magic total labeling dari *graphs* $CB(m, a, t)$ adalah open problem. Marr dan Wallis (2013) mengajukan pertanyaan apakah *graphs* $CB(a, m, t)$ mempunyai edge-magic total labeling atau super edge-magic total labeling. Untuk mempermudah penulisan pertanyaan ini diberi nama Problem 1 seperti berikut.

Problem 1: Apakah *graphs* $CB(m, a, t)$ mempunyai edge-magic total labeling dan super edge-magic total labeling?

Problem 1 muncul dari hasil-hasil penelitian tentang edge-magic total labeling dan super edge-magic total labeling dari *single* lingkaran. Beberapa artikel yang membahas tentang edge-magic total labeling atau super edge-magic total labeling dari *single* lingkaran adalah Kotzig dan Rosa (1970), Berkman, Parnas dan Roditty (2001), Enomoto *et al.* (1998) dan Kayathri dan Jemima (2016).

Problem 1 adalah *open problem*, namun demikian solusi beberapa kasus sudah ditemukan. Figueroa-Centeno *et al.* (2001) menemukan solusi parsial Problem 1 untuk $m = 4$ dan $t = 2$. Mereka membuktikan bahwa *graphs* $CB(4, a, 2)$ mempunyai edge-magic total labeling. Selain itu mereka membuktikan bahwa *graphs* $CB(4, a, 2)$ adalah super edge-magic total labeling untuk $a = 2, 4, 5, 6, 8, 10$ dan bukan super edge-magic total labelling untuk a bilangan ganjil $a \geq 7$ dan $a \not\equiv 5 \pmod{8}$. Lebih lanjut mereka mengemukakan *Konjektur* berikut.

Konjektur 1 (Figueroa-Centeno *et al.*, 2001): Misalkan G adalah *graphs* $CB(4, a, 2)$. *Graph* G adalah super edge-magic total labeling jika dan hanya jika a adalah bilangan genap atau $a \equiv 5 \pmod{8}$.

Purnamasari (2018) dan Damanik (2020) telah membuktikan *Konjektur 1* masing-masing untuk bilangan genap $12 \leq a \leq 20$ dan $22 \leq a \leq 34$. Selanjutnya Simanihuruk *et al.* (2021) membuktikan *Konjektur 1* untuk bilangan genap $a, a \geq 36$. Jadi *Konjektur 1* sudah terbukti untuk bilangan genap a .

Konjektur 1 masih *open problem* untuk $a \equiv 5 \pmod{8}$, namun demikian solusi parsial sudah ditemukan. Simanihuruk (2020) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 13$, Yani (2020) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 21$, Astuti (2021) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 29$, Sari (2022) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 37$, Lidia (2024) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 45$, Soraya (2024) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 53$, Sinaga (2024) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 61$, Amelia (2022) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 69$, Khusna (2022) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 77$, Saragih (2022) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 85$, Butar-butur (2023) membuktikan *Konjektur 1* untuk $a = 93$, dan Nurpenda (2024) membuktikan *Konjektur 1* $a = 101, 109$. Jadi problem penelitian ini dirumuskan seperti berikut.

Problem 2: Apakah graphs $CB(4, a, 2)$ mempunyai super edge-magic total labeling untuk $a \equiv 5 \pmod{8}$ dan $a \geq 117$?

Karena Problem 2 merupakan *open problem*, maka *novelty* penelitian ini adalah penemuan rumus-rumus baru matematika yang merupakan solusi dari Problem 2. Jadi tujuan penelitian ini adalah mencari super edge-magic total labeling dari graphs $CB(4, a, 2)$ mempunyai super edge-magic total labeling untuk $a \equiv 5 \pmod{8}$ dan $a \geq 117$. Artikel ini berhasil membuktikan bahwa graphs $CB(4, a, 2)$ mempunyai super edge-magic total labeling untuk $a = 125, 133, 144$. algoritma RSA. Kasus $a \equiv 5 \pmod{8}$ dan $a = 117$ belum berhasil dibuktikan. Hasil penelitian dibuktikan dengan metode *modus ponens* dan *modus tollens*. Selanjutnya akan diberikan ilustrasi bagaimana menggunakan super edge-magic total labeling dari graphs $CB(4, 125, 2)$ untuk mengkonstruksi bahasa sandi (rahasia) dengan menggunakan algoritma RSA.

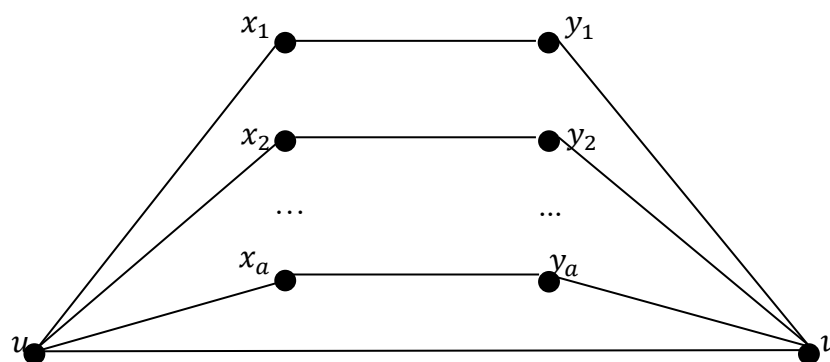
METODE PENELITIAN

Figueroa-Centeno *et al.* (2001) membuktikan beberapa syarat perlu bagi super edge-magic total labeling of a graph. Teorema-teorema tersebut digunakan untuk membuktikan hasil-hasil penelitian artikel ini. Oleh karena itu kita awali dengan definisi serta notasi yang diperlukan.

Definisi 1.1 Misalkan G adalah graph $CB(4, a, 2)$, $X = \{u\}$, $Y = \{v\}$, $Z = \{x_1, x_2, \dots, x_a\}$ dan $W = \{y_1, y_2, \dots, y_a\}$. Didefinisikan vertex set $V(G) = X \cup Y \cup Z \cup W$ dan edge set $E(G) = \{(a, b) : a \in X, b \in Y\} \cup \{(a, b) : a \in Z, b \in W\} \cup \{(a, b) : a \in X, b \in Z\} \cup \{(a, b) : a \in Y, b \in W\}$.

Anggota dari $X \cup Y$ dan edge (u, v) berturut-turut disebut *common vertices* dan *common edge* dari a salinan dari C_4 .

Graph $CB(4, a, 2)$ dalam Definisi 1.1 ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1: Graph $CB(4, a, 2)$

Teorema 2.1 – 2.3 diambil dari dalam Figueroa-Centeno *et al.* (2001):

Teorema 2.1. Misalkan G adalah graph dengan $|V(G)| = \alpha$ dan $|E(G)| = \beta$. Graph G dikatakan super edge-magic jika dan hanya jika terdapat fungsi bijektif $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \alpha\}$ sedemikian sehingga, $S = \{z: z = \varphi(a) + \varphi(b), (a, b) \in E(G)\}$ terdiri dari β bilangan bulat yang berurutan. Dalam kasus ini, φ dikatakan super edge-magic total labeling pada G dengan $k = \alpha + \beta + s$, di mana $s = \min(S)$ dan $S = \{k - (\alpha + 1), k - (\alpha + 2), \dots, k - (\alpha + \beta)\}$. ■

Teorema 2.2. Misalkan G adalah graph $CB(4, a, 2)$ sedemikian hingga $S = \{x: x = \varphi(w) + \varphi(z), (w, z) \in E(G)\}$ dan $s = \min(S)$. Jika G memiliki super edge-magic total labeling dan a ganjil, maka $a \equiv 5 \pmod{8}$ dan $s \in \left\{\frac{a+27}{8}, \frac{3a+25}{8}, \frac{5a+23}{8}, \frac{7a+21}{8}, \frac{9a+19}{8}\right\}$ kecuali $a = 5$, dalam hal ini s juga bisa bernilai 3.

Teorema berikut diturunkan dari bukti Teorema 2.3 dari Figueroa-Centeno *et al.* (2001):

Teorema 2.3. Misalkan G adalah graph $CB(4, a, 2)$ dalam Definisi 1.1 dan misalkan (u, v) adalah common edges dari semua lingkaran C_4 dalam G . Jika G memiliki super edge-magic total labeling, maka $\varphi(u) + \varphi(v) = \frac{6as+a^2+2s-17a-12}{2m-2}$. ■

Dengan menggunakan Teorema 2.1, 2.2 dan 2.3 prosedur penelitian dilakukan seperti berikut.

Prosedur 1: Gunakan Teorema 2.2 untuk menentukan nilai s untuk $a = 125$.

Prosedur 2: Gunakan Teorema 2.3 untuk menentukan nilai $\varphi(u) + \varphi(v)$ untuk $a = 141$ dan nilai s yang diperoleh pada Prosedur 1.

Prosedur 3: Tentukan nilai $\varphi(u) = 1$ pada Prosedur 2 dan cari nilai $\varphi(v)$.

Prosedur 4: Dengan menggunakan nilai s pada Prosedur 1 dan nilai $\varphi(u)$ dan $\varphi(v)$ pada Prosedur 3 akan dirumuskan fungsi bijektive $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ dengan menggunakan metode trial and error (metode coba-coba).

Prosedur 5: Buktikan bahwa fungsi *bijective* yang diperoleh pada Prosedur 4 memenuhi kondisi Teorema 2.1. Hal ini dilakukan dengan mengimplementasi Metode *modus ponens* atau *modus tollens*. Metode modus ponens adalah metode penerikan kesimpulan seperti berikut: Jika P maka Q dan ternyata P , maka kesimpulannya adalah Q . Metode modus tollens adalah metode penarikan kesimpulan seperti berikut: Jika P maka Q dan ternyata tidak Q , maka kesimpulannya adalah tidak P .

Prosedur 6: Hasil dari Prosedur 5 dipilih untuk mengkonstruksi bahasa sandi dengan menggunakan algoritma RSA yang dijelaskan oleh Jegan *et al.* (2022).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Pada bagian ini akan dibuktikan super edge-magic total labeling dari graph $CB(4, a, 2)$ untuk $a = 125$. Kita substitusikan nilai $a = 125$ pada Teorema 2.3 dan 2.4 akan diperoleh $s \in \{19, 50, 81, 112, 143\}$ dan $\varphi(u) + \varphi(v) = \frac{752s+13488}{248}$. Dua data terakhir ini dan Teorema 2.1 menghasilkan Hasil Penelitian 1.

Hasil Penelitian 1. Misalkan G adalah graphs $CB(4, a, 2)$ untuk $a \equiv 5 \pmod{8}$, $a = 125$ dengan $|V(G)| = \alpha$ dan $|E(G)| = \beta$. Didefinisikan $S = \{\varphi(w) + \varphi(z): (w, z) \in E(G)\}$ dan $s = \min(S)$. Jika graph G memiliki super edge-magic total labeling maka:

- i. $s \in \{19, 50, 81, 112, 143\}$,
- ii. $\varphi(u) + \varphi(v) = \frac{752s+13488}{248}$,
- iii. S adalah barisan aritmatika yang sukunya berurutan dengan banyaknya suku adalah q ,
- iv. $k = \alpha + \beta + s$. ■

Untuk $s = 19$ pada Hasil 1 diperoleh $\varphi(u) + \varphi(v) = 112$. Salah satu solusi dari persamaan yang terakhir ini adalah $\varphi(u) = 1$ dan $\varphi(v) = 111$. Pada Hasil Penelitian 2 akan

dibuktikan bahwa Hasil Penelitian 1 merupakan syarat cukup untuk $B(4, a, 2)$; $a = 125$, memiliki super edge-magic total labeling untuk $s = 19$ dan $\varphi(u) = 1$ dan $\varphi(v) = 111$. Apakah graphs $CB(4, a, 2)$; $a = 125$, memiliki super edge-magic total labeling untuk $s = 19$ dan solusi lain dari $\varphi(u) + \varphi(v) = 112$ belum berhasil dijawab artikel ini.

Hasil Penelitian 2. Misal G adalah graphs $CB(4, a, 2)$ dengan $a = 125$, $|V(G)| = \alpha$ dan $|E(G)| = \beta$. Misalkan u dan v adalah vertex pada common path dari G dan $\varphi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \alpha + \beta\}$ sedemikian sehingga $S = \{z: z = \varphi(a) + \varphi(b), (a, b) \in E(G)\}$ dan $s = \min(S)$. Jika

- (i) $s = 19$,
- (ii) $\varphi(u) = 1$ dan $\varphi(v) = 111$,

maka G adalah super edge-magic total. ■

Dua hasil penelitian berikut dapat dibuktikan dengan cara yang sama pada pembuktian Hasil Penelitian 2. Untuk menyajikan kedua hasil penelitian tersebut diperlukan notasi berikut. Notasi $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ bermakna $\varphi(x_1) = a_1$, $\varphi(x_2) = a_2$, ..., $\varphi(x_n) = a_n$.

Hasil Penelitian 3. Misal G adalah graphs $CB(4, a, 2)$ dengan $a = 133$, $|V(G)| = \alpha$ dan $|E(G)| = \beta$. Misalkan u dan v adalah vertex pada common path dari G dan $\varphi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \alpha + \beta\}$ sedemikian sehingga $S = \{z: z = \varphi(a) + \varphi(b), (a, b) \in E(G)\}$ dan $s = \min(S)$. Jika

- (i). $s = 20$,
- (ii). $\varphi(u) = 1$ dan $\varphi(v) = 118$,

maka G memiliki super edge-magic total labeling dengan $\varphi(u, u_1, u_2, \dots, u_{132}, u_{133}) = (1, 19, 21, 22, \dots, 84, 85, 90, 91, \dots, 111, 112, 136, 138, 139, \dots, 177, 178, 211, 218)$ dan $f(v, v_1, v_2, \dots, v_{133}) = (118, 2, 243, 199, 180, 202, 204, 187, 203, 181, 250, 230, 265, 185, 189, 191, 193, 238, 186, 223, 227, 184, 244, 241, 219, 224, 213, 232, 207, 234, 235, 206, 242, 228, 214, 205, 226, 216, 200, 212, 217, 209, 137, 215, 225, 197, 208, 135, 133, 129, 126, 195, 122, 264, 190, 128, 119, 123, 113, 114, 132, 134, 115, 6, 7, 3, 4, 125, 198, 116, 117, 201, 192, 120, 121, 194, 88, 89, 87, 12, 124, 11, 86, 10, 179, 182, 127, 8, 183, 5, 251, 266, 263, 252, 188, 268, 254, 131, 267, 253, 256, 257, 259, 248, 239, 261, 236, 262, 246, 240, 249, 260, 258, 255, 130, 229, 18, 247, 17, 20, 13, 15, 16, 14, 122, 237, 221, 245, 220, 231, 223, 210, 9, 196).$

Hasil Penelitian 4. Misalkan G adalah graphs $CB(4, a, 2)$ dengan $|V(G)| = \alpha$, $|E(G)| = \beta$ dan $a = 141$. Misalkan u dan v adalah vertex pada common path dan $\varphi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \alpha + \beta\}$ sedemikian sehingga $S = \{a: a = \varphi(w) + \varphi(z), (w, z) \in E(G)\}$ dan $s = \min(S)$. Jika

- (i) $s = 21$,
- (ii) $\varphi(u) = 1$ dan $\varphi(v) = 125$,

maka G memiliki super edge-magic total labeling dengan $\varphi(u, u_1, u_2, \dots, u_{140}, u_{141}) = (1, 20, 22, 23, \dots, 89, 90, 95, 96, \dots, 189, 190, 225, 230)$ dan $f(v, v_1, v_2, \dots, v_{141}) = (125, 2, 284, 202, 283, 213, 262, 200, 281, 199, 280, 198, 279, 197, 246, 196, 277, 195, 243, 265, 201, 245, 193, 194, 192, 240, 223, 224, 254, 191, 239, 242, 238, 231, 220, 227, 219, 230, 143, 217, 142, 211, 141, 228, 233, 140, 145, 139, 226, 138, 129, 137, 229, 136, 234, 135, 216, 206, 236, 133, 218, 132, 214, 131, 215, 130, 209, 6, 7, 3, 4, 128, 204, 127, 205, 123, 250, 119, 203, 118, 208, 210, 92, 93, 13, 11, 14, 12, 10, 91, 5, 124, 134, 8, 273, 276, 126, 94, 272, 207, 274, 259, 278, 261, 122, 271, 121, 270, 120, 269, 282, 268, 251, 275, 248, 266, 249, 252, 264, 267, 247, 263, 19, 21,$

244, 17, 257, 18, 15, 258, 16, 260, 253, 256, 241, 255, 237, 235, 221, 222, 9, 212).

Pembahasan (pembuktian) hasil penelitian

Pada bagian ini akan dibuktikan Hasil Penelitian 1 dan 2. Hasil Penelitian 3 dan 4 dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

Bukti Hasil Penelitian 1 : Syarat (i) dan (ii) diperoleh dengan mensubstitusikan nilai $\alpha = 125$ pada Teorema 2.3 dan 2.4 sehingga diperoleh $s \in \{19, 50, 81, 112, 143\}$ dan $\varphi(u) + \varphi(v) = \frac{752s+13488}{248}$. Syarat (iii) dan (iv) langsung diperoleh dari Teorema 2.1.

Bukti Hasil Penelitian 2 : Misalkan φ memenuhi (i), (ii). Akan dibuktikan bahwa G mempunyai super edge-magic total labeling. Dapat dihitung bahwa $|V(G)| = \alpha = 252$ dan $|E(G)| = \beta = 376$. Didefinisikan fungsi bijektif $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 252\}$ sebagai berikut.

$$\varphi(u) = 1 \quad (1)$$

$$\varphi(x_1) = 18 \quad (2)$$

$$\varphi(x_i) = 18 + i, i = 2, 3, \dots, 62 \quad (3)$$

$$\varphi(x_i) = 22 + i, i = 63, 64, \dots, 84 \quad (4)$$

$$\varphi(x_i) = 128, i = 85 \quad (5)$$

$$\varphi(x_i) = 44 + i, i = 86, 87, \dots, 123 \quad (6)$$

$$\varphi(x_i) = 198, i = 124 \quad (7)$$

$$\varphi(x_i) = 205, i = 125 \quad (8)$$

Selanjutnya fungsi bijektif $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 252\}$ untuk $v, v_i \in V(G), i = 1, 2, \dots, 125$ didefinisikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Definisi Fungsi Bijektif $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 252\}$ untuk $v, v_i \in V(G), i = 1, 2, \dots, 125$

$\varphi(v) = 111,$			
$\varphi(y_1) = 2,$	$\varphi(y_{11}) = 179,$	$\varphi(y_{21}) = 238,$	$\varphi(y_{31}) = 201,$
$\varphi(y_2) = 168,$	$\varphi(y_{12}) = 184,$	$\varphi(y_{22}) = 182,$	$\varphi(y_{32}) = 206,$
$\varphi(y_3) = 181,$	$\varphi(y_{13}) = 180,$	$\varphi(y_{23}) = 211,$	$\varphi(y_{33}) = 216,$
$\varphi(y_4) = 174,$	$\varphi(y_{14}) = 207,$	$\varphi(y_{24}) = 215,$	$\varphi(y_{34}) = 202,$
$\varphi(y_5) = 194,$	$\varphi(y_{15}) = 233,$	$\varphi(y_{25}) = 210,$	$\varphi(y_{35}) = 217,$
$\varphi(y_6) = 173,$	$\varphi(y_{16}) = 228,$	$\varphi(y_{26}) = 204,$	$\varphi(y_{36}) = 192,$
$\varphi(y_7) = 175,$	$\varphi(y_{17}) = 226,$	$\varphi(y_{27}) = 223,$	$\varphi(y_{37}) = 129,$
$\varphi(y_8) = 177,$	$\varphi(y_{18}) = 224,$	$\varphi(y_{28}) = 199,$	$\varphi(y_{38}) = 213,$
$\varphi(y_9) = 171,$	$\varphi(y_{19}) = 222,$	$\varphi(y_{29}) = 227,$	$\varphi(y_{39}) = 187,$
$\varphi(y_{10}) = 176,$	$\varphi(y_{20}) = 209,$	$\varphi(y_{30}) = 203,$	$\varphi(y_{40}) = 185,$
$\varphi(y_{41}) = 183,$	$\varphi(y_{51}) = 113,$	$\varphi(y_{61}) = 3,$	$\varphi(y_{71}) = 122,$
$\varphi(y_{42}) = 118,$	$\varphi(y_{52}) = 115,$	$\varphi(y_{62}) = 4,$	$\varphi(y_{72}) = 16,$
$\varphi(y_{43}) = 188,$	$\varphi(y_{53}) = 120,$	$\varphi(y_{63}) = 193,$	$\varphi(y_{73}) = 82,$
$\varphi(y_{44}) = 196,$	$\varphi(y_{54}) = 169,$	$\varphi(y_{64}) = 123,$	$\varphi(y_{74}) = 109,$
$\varphi(y_{45}) = 127,$	$\varphi(y_{55}) = 191,$	$\varphi(y_{65}) = 178,$	$\varphi(y_{75}) = 14,$
$\varphi(y_{46}) = 125,$	$\varphi(y_{56}) = 112,$	$\varphi(y_{66}) = 124,$	$\varphi(y_{76}) = 81,$
$\varphi(y_{47}) = 190,$	$\varphi(y_{57}) = 126,$	$\varphi(y_{67}) = 186,$	$\varphi(y_{77}) = 117,$
$\varphi(y_{48}) = 114,$	$\varphi(y_{58}) = 195,$	$\varphi(y_{68}) = 84,$	$\varphi(y_{78}) = 8,$
$\varphi(y_{49}) = 116,$	$\varphi(y_{59}) = 6,$	$\varphi(y_{69}) = 218,$	$\varphi(y_{79}) = 172,$
$\varphi(y_{50}) = 119,$	$\varphi(y_{60}) = 7,$	$\varphi(y_{70}) = 83,$	$\varphi(y_{80}) = 214,$
$\varphi(y_{81}) = 107,$	$\varphi(y_{91}) = 230,$	$\varphi(y_{101}) = 242,$	$\varphi(y_{111}) = 15,$

$\varphi(y_{82}) = 5,$	$\varphi(y_{92}) = 243,$	$\varphi(y_{102}) = 221,$	$\varphi(y_{112}) = 234,$
$\varphi(y_{83}) = 108,$	$\varphi(y_{93}) = 251,$	$\varphi(y_{103}) = 245,$	$\varphi(y_{113}) = 220,$
$\varphi(y_{84}) = 170,$	$\varphi(y_{94}) = 247,$	$\varphi(y_{104}) = 235,$	$\varphi(y_{114}) = 212,$
$\varphi(y_{85}) = 248,$	$\varphi(y_{95}) = 236,$	$\varphi(y_{105}) = 219,$	$\varphi(y_{115}) = 10,$
$\varphi(y_{86}) = 250,$	$\varphi(y_{96}) = 229,$	$\varphi(y_{106}) = 241,$	$\varphi(y_{116}) = 12,$
$\varphi(y_{87}) = 240,$	$\varphi(y_{97}) = 231,$	$\varphi(y_{107}) = 121,$	$\varphi(y_{117}) = 225,$
$\varphi(y_{88}) = 252,$	$\varphi(y_{98}) = 232,$	$\varphi(y_{108}) = 19,$	$\varphi(y_{118}) = 11,$
$\varphi(y_{89}) = 249,$	$\varphi(y_{99}) = 246,$	$\varphi(y_{109}) = 110,$	$\varphi(y_{119}) = 13,$
$\varphi(y_{90}) = 244,$	$\varphi(y_{100}) = 237,$	$\varphi(y_{110}) = 239,$	$\varphi(y_{120}) = 17,$
$\varphi(y_{121}) = 208,$	$\varphi(y_{122}) = 200,$	$\varphi(y_{123}) = 197,$	$\varphi(y_{124}) = 9,$
$\varphi(y_{125}) = 189.$			

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $S = \{z: z = \varphi(a) + \varphi(b), (a, b) \in E(G)\} = \{19, 20, 21, \dots, 394\}$ terdiri dari β bilangan bulat berurutan di mana $\beta = 376$. Misalkan $M_i \subset S, i$ adalah bilangan bulat positif.

Dari (1) dan (2) diperoleh $\varphi(u) + \varphi(x_1) = 19$. Definiskan $M_1 = \{19\}$.

Dari (2) dan (10) diperoleh $\varphi(x_1) + \varphi(y_1) = 20$. Definiskan $M_2 = \{20\}$.

Dari (1) dan (3) diperoleh $\varphi(u) + \varphi(x_i) = 19 + i, i = 2, 3, \dots, 62$. Untuk $i = 2, 3, \dots, 62$ pada persamaan terakhir ini didefinisikan $M_3 = \{21, 22, \dots, 81\}$.

Dari (3) diperoleh $\varphi(x_{61}) = 79$ dan dari Tabel 1 diperoleh $\varphi(y_{61}) = 3$. Jadi $\varphi(x_{61}) + \varphi(y_{61}) = \{82\}$. Didefinisikan $M_4 = \{82\}$. Dengan cara yang sama diperoleh $\varphi(x_{59}) + \varphi(y_{59}) = 83$, $\varphi(x_{62}) + \varphi(y_{62}) = 84$, $\varphi(x_{60}) + \varphi(y_{60}) = 85$. Dari perhitungan ini didefinisikan $M_5 = \{82, 83, 85\}$. Dari (1) dan (4) diperoleh $\varphi(u) + \varphi(x_i) = 23 + i, i = 63, 64, \dots, 84$. Untuk $i = 63, 64, \dots, 84$ pada persamaan terakhir ini didefinisikan $M_6 = \{86, 87, \dots, 107\}$.

Dari nilai $\varphi(x_{78})$ pada (4) dan nilai $\varphi(y_{78})$ pada Tabel 1. Diperoleh:

$\varphi(x_{78}) + \varphi(y_{78}) = 108$. Definiskan $M_6 = \{108\}$. Dengan cara yang sama akan diperoleh $M_7 = \{109, 110, \dots, 394\}$. Dari $M_1, M_2, \dots, M_7$ diperoleh

$S = M_1 \cup M_2 \dots \cup M_7 = \{19, 20, \dots, 394\}$. Perhatikanlah bahwa S terdiri dari β bilangan bulat berurutan di mana $\beta = 376$. Berdasarkan Teorema 2.1 dapat disimpulkan bahwa *graphs* $CB(4, a, 2)$ untuk $a = 125$ mempunyai *super edge-magic total labeling*. ■

Sebagaimana dijelaskan pada pendahuluan bahwa penentuan *super edge-magic total labeling* dari *graphs* $CB(m, a, t)$ adalah open problem meskipun untuk nilai $m = 4, a \equiv 5 \pmod{8}, t = 2$. *Super edge-magic total labeling* dari *graphs* $CB(4, a, 2)$ pada Hasil 1, 2 dan 3 sulit digeneralisasi untuk semua nilai $a \equiv 5 \pmod{8}$. Hal ini berbeda untuk nilai bilangan genap a . *Super edge-magic total labeling* dari *graphs* $CB(4, a, 2)$ untuk bilangan genap a $12 \leq a \leq 20$ dan $22 \leq a \leq 34$ dapat digeneralisasi untuk bilangan genap $a \geq 36$ (Simanihuruk *et al.*, 2021). Jadi penentuan *super edge-magic total labeling* dari *graphs* $CB(m, a, 2)$ masih open problem untuk $a \geq 5$. Hasil-hasil penelitian sebelumnya tidak mudah dikembangkan untuk menentukan *super edge-magic total labeling* dari *graphs* $CB(m, a, 2)$ untuk $a \geq 5$ meskipun untuk kasus kecil $m = 4, a \equiv 5 \pmod{8}, t = 2$.

Perhatikanlah bahwa *graphs* $CB(m, a, t)$ terdiri dari satu jenis order lingkaran. Swita *et al.* (2019) mengembangkan *graphs* $CB(m, a, 2)$ menjadi dua jenis lingkaran dengan order berbeda-beda. Mereka mengkonstruksi *graph* *graphs* $CB(m, a, n, b, t)$ dari a salinan lingkaran C_m dan b salinan lingkaran C_n dengan irisan edge semua lingkaran adalah *path* P_t . Penentuan *edge-magic total labeling* dan *super edge-magic total labeling* dari $CB(m, a, n, b, t)$ juga sangat sulit, namun demikian solusi beberapa kasus sudah ditemukan. Sitohang, Swita dan Simanihuruk (2018) telah menunjukkan bahwa *graphs* $CB(4, 1, 3, b, 2)$ mempunyai *edge-magic total labeling* untuk setiap b .

Swita *et al.* (2019) telah menemukan edge-magic total labeling pada graphs $CB(7,1,3, b, 2)$ dan super edge-magic total labeling pada graphs $CB(7,2,3, b, 2)$ untuk setiap bilangan bulat positif b . Swita *et.al* juga telah menunjukkan bahwa graphs $CB(m, 1, 3, b, 2)$ mempunyai super edge-magic total labeling untuk $m = 4x - 1, x$ bilangan bulat dan $x \geq 2$. Swita *et al.* (2021) telah menunjukkan super edge-magic total labeling dari graphs $CB(5,2,3, b, 2)$ untuk setiap bilangan bulat positif b . Swita *et al.* (2024) telah menemukan super edge-magic total labeling dari graphs $CB(4,12, 3, b, 2)$ untuk semua b . Baru-baru ini Swita *et al.* Swita *et al.* (2025) telah menemukan super edge-magic total labeling dari graphs $CB(4, a, 3, b, 2)$ untuk semua bilangan genap $a \geq 2$ dan $b = 1, 2$.

Aplikasi pada pembentukan bahasa sandi dengan algoritma RSA

Misalkan $y_1, y_2 \dots y_r$ adalah huruf (*characters*). Akan digunakan super edge- magic total labeling dari $CB(4, 125, 2)$ untuk mengenkripsi dan mendekripsi bahasa sandi (bahasa rahasia) dengan menggunakan r huruf. Pertama kita encode r huruf dengan super edge- magic total labeling dari $CB(4, 125, 2)$ dengan syarat $125 \geq r$. Kedua kita encode r huruf dimaksud dengan label dari $y_3^i, i = 1, 2, \dots r$.

Selanjutnya akan diberikan ilustrasi untuk mengkonstruksi bahasa sandi. Misalkan kita akan mengenkripsi bahasa sandi dengan menggunakan 26 huruf besar , 26 huruf kecil dan 4 karakter “spasi”, simbol “,”, simbol “.” dan simbol “?” . Selanjutnya ke 56 karakter ini diencode dengan super edge-magic total labeling dari *graph* $CB(4,125,2)$. Label dari $y_1, y_2, \dots, y_{56}$ dari $B(4, 125, 2)$ digunakan sebagai *encode* dari 56 huruf seperti Tabel 2.

Tabel 2. Encode 56 Huruf dengan Super Edge-Magic Total Labeling dari $CB(4,125,2)$

Vertice s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}
Alphabe t	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Label	2	168	181	174	194	173	175	177	171	176	179	184	180	207

Vertice s	y_{15}	y_{16}	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_{20}	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}	y_{26}
Alphabe t	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Label	233	228	226	224	222	209	238	182	211	215	210	204

Vertice s	y_{27}	y_{28}	y_{29}	y_{30}	y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}	y_{35}	y_{36}	y_{37}	y_{38}	y_{39}	y_{40}
Alphabe t	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
Label	223	199	227	203	201	206	216	202	217	192	129	213	187	185

Vertice s	y_{41}	y_{42}	y_{43}	y_{44}	y_{45}	y_{46}	y_{47}	y_{48}	y_{49}	y_{50}	y_{51}	y_{52}
Alphabe t	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Label	183	118	188	196	127	125	190	114	116	119	113	115

Vertice s	y_{53}	y_{54}	y_{55}	y_{56}
--------------	----------	----------	----------	----------

Alphabe	'	'	,	.	?
t					
Label	120	169	191	112	

Encode pada Tabel 2 akan digunakan untuk memberikan ilustrasi bagaimana mengenkrip dan mendekrip bahasa sandi dengan RSA. Untuk itu akan dijelaskan dulu algoritma RSA dari Jegan *et al.* (2022).

RSA Algorithm (Jegan *et al.*, 2022)

Langkah 1:

Pilih dua bilangan prima p dan q

Langkah 2:

Hitung $n = pq$ dan $z = (p - 1)(q - 1)$

Langkah 3:

Pilih bilangan d sedemikian hingga faktor persekutuan terbesar dari d dan z adalah 1

Langkah 4:

Cari e sedemikian hingga $ed \equiv 1 \pmod{z}$

Langkah 5:

Misalkan P adalah Encode dari salah satu huruf dari 52 huruf pada Tabel 2. Simbol P disebut plain text. Kita enkripsi P dengan menghitung $C \equiv P^e \pmod{n}$ di mana C adalah encode dari salah satu huruf dari 52 huruf pada Tabel 2. Simbol C disebut *chiper text*. Pasangan bilangan (e, n) disebut *public key*.

Langkah 6:

Untuk mendekrip C kita hitung $P \equiv C^d \pmod{n}$. Pasangan bilangan (d, n) disebut *private key*.

Kedua bilangan prima p dan q pada Langkah 1 dipilih sebesar mungkin karena keamanan bahasa sandi RSA tergantung pada kesulitan memfaktorkan bilangan n ke dalam dua bilangan prima p dan q (Jegan *et al.* 2022).

Sebagai ilustrasi, akan diberikan implementasi RSA Algorithm dengan menggunakan bahasa pemrograman Python untuk mengkonstruksi pesan rahasia dengan menggunakan label dari $v_1, v_2, \dots, v_{56}$ dari $B[(4,125), 2]$ pada Tabel 2. Program Pythonnya diberi nama # Program RSA 56-Simbol seperti berikut.

```
# Program RSA 56-Simbol
```

```
# 1. Kode Program
```

```
import random
```

```
from math import gcd
```

```
import textwrap # Import the textwrap module
```

```
# =====
```

```
# 1. Mapping simbol → angka
```

```
# =====
```

```
CHAR_TO_NUM = {
```

```
    'A': 2, 'B': 168, 'C': 181, 'D': 174, 'E': 194, 'F': 173, 'G': 175,
```

```
    'H': 177, 'I': 171, 'J': 176, 'K': 179, 'L': 184, 'M': 180, 'N': 207,
```

```
    'O': 233, 'P': 228, 'Q': 226, 'R': 224, 'S': 222, 'T': 209, 'U': 238,
```

```
    'V': 182, 'W': 211, 'X': 215, 'Y': 210, 'Z': 204,
```

```
    'a': 223, 'b': 199, 'c': 227, 'd': 203, 'e': 201, 'f': 206, 'g': 216,
```

```
    'h': 202, 'i': 217, 'j': 192, 'k': 129, 'l': 213, 'm': 187, 'n': 185,
```

```
    'o': 183, 'p': 118, 'q': 188, 'r': 196, 's': 127, 't': 125, 'u': 190,
```

```

    'v': 114, 'w': 116, 'x': 119, 'y': 113, 'z': 115,
    ' ': 120, ',': 169, '.': 191, '?': 112
}
NUM_TO_CHAR = {v: k for k, v in CHAR_TO_NUM.items()}

# =====
# 2. Fungsi bantu RSA
# =====
def modinv(a, m):
    """Cari invers a mod m"""
    for x in range(1, m):
        if (a * x) % m == 1:
            return x
    return None

def generate_keypair(p, q):
    n = p * q
    phi = (p - 1) * (q - 1)

    e = random.randrange(2, phi)
    while gcd(e, phi) != 1:
        e = random.randrange(2, phi)

    d = modinv(e, phi)
    return ((e, n), (d, n)) # (public, private)

# =====
# 3. RSA Encrypt / Decrypt
# =====
def encrypt(public_key, plaintext):
    e, n = public_key
    nums = [CHAR_TO_NUM[ch] for ch in plaintext]
    return [pow(num, e, n) for num in nums]

def decrypt(private_key, ciphertext):
    d, n = private_key
    nums = [pow(num, d, n) for num in ciphertext]
    return "".join(NUM_TO_CHAR[num] for num in nums)

# =====
# 4. Main Program
# =====
if __name__ == "__main__":
    print("=== RSA 56-Simbol ===")

    # pilih bilangan prima (contoh kecil dulu)
    p, q = 31, 41
    public, private = generate_keypair(p, q)

    print("Public Key :", public)

```

```

print("Private Key:", private)

# input pesan dari user
pesan = input("\nMasukkan pesan: ")
print("\nPesan yang dimasukkan:\n")
print("\n".join(textwrap.wrap(pesan, width=80))) # bungkus teks pesan agar tidak memanjang

# enkripsi
encrypted = encrypt(public, pesan)
encrypted_text = "".join(map(str, encrypted))

print("\nHasil Enkripsi:\n")
print("\n".join(textwrap.wrap(encrypted_text, width=80))) # bungkus hasil enkripsi

# dekripsi
decrypted = decrypt(private, encrypted)
print("\nHasil Dekripsi:\n")
print("\n".join(textwrap.wrap(decrypted, width=80))) # bungkus hasil dekripsi

```

Instruksi menjalankan Program Python: Klik (Copy) link berikut

https://colab.research.google.com/drive/1Mz6FeWvAYvWvCQa2WVQRTRdUCM3w_bhbbo?usp=sharing

Selanjutnya jalankan program itu dengan input pesan rahasia: Kebijakan ini diluncurkan bersama Bappenas dengan Kementerian Koordinator Bidang Infrastruktur dan Pembangunan Kewilayahan, Kementerian Dalam Negeri, Kementerian Perumahan, dan Kementerian Pekerjaan Umum.

Hasil out dapat dari program tersebut adalah:

1. Masukkan pesan:

Kebijakan ini diluncurkan bersama Bappenas dengan Kementerian Koordinator Bidang Infrastruktur dan Pembangunan Kewilayahan, Kementerian Dalam Negeri, Kementerian Perumahan, dan Kementerian Pekerjaan Umum.

2. Hasil enkripsi:

[600, 201, 375, 1054, 956, 305, 1265, 305, 185, 864, 1054, 185, 1054, 864, 859, 1054, 213, 97, 185, 19, 97, 360, 1265, 305, 185, 864, 375, 201, 360, 168, 305, 187, 305, 864, 127, 305, 36, 36, 201, 185, 305, 168, 864, 859, 201, 185, 30, 305, 185, 864, 600, 201, 187, 201, 185, 125, 201, 360, 1054, 305, 185, 864, 600, 514, 514, 360, 859, 1054, 185, 305, 125, 514, 360, 864, 127, 1054, 859, 305, 185, 30, 864, 977, 185, 534, 360, 305, 168, 125, 360, 97, 1265, 125, 97, 360, 864, 859, 305, 185, 864, 1171, 201, 187, 375, 305, 185, 30, 97, 185, 305, 185, 864, 600, 201, 581, 1054, 213, 305, 441, 305, 946, 305, 185, 784, 864, 600, 201, 187, 201, 185, 125, 201, 360, 1054, 305, 185, 864, 10, 305, 213, 305, 187, 864, 43, 201, 30, 201, 360, 1054, 784, 864, 600, 201, 187, 201, 185, 125, 201, 360, 1054, 305, 185, 864, 1171, 201, 360, 97, 187, 305, 946, 305, 185, 784, 864, 859, 305, 185, 864, 600, 201, 187, 201, 185, 125, 201, 360, 1054, 305, 185, 864, 1171, 201, 1265, 201, 360, 956, 305, 305, 185, 864, 74, 187, 97, 187, 1203]

3. Hasil dekripsi:

Kebijakan ini diluncurkan bersama Bappenas dengan Kementerian Koordinator Bidang Infrastruktur dan Pembangunan Kewilayahan, Kementerian Dalam Negeri, Kementerian Perumahan, dan Kementerian Pekerjaan Umum.

Keterbatasan Pemrograman Python pada link

https://colab.research.google.com/drive/1fAjsiDqwwU0SLf6xTs_AQ6s87UwmP1UG?usp=sharing.

1. Program ini hanya dapat mengeksekusi bahasa sandi yang memuat huruf atau karakter pada Tabel 2. Program ini tidak dapat mengeksekusi pesan bahasa yang encodenya tidak ada dalam Tabel 2. Misalnya pesan bahasa sandi: **"Kebersamaan lima kementerian dalam peluncuran Kebijakan Perkotaan Nasional (KPN)"** tidak dapat dieksekusi program Python pada link di atas karena pesan rahasianya memuat tanda kurung (KPN) yang tidak diencode pada Tabel 2.
2. Eksekusi Program Python di atas dapat dieksekusi oleh umum, sepanjang pesan rahasianya memenuhi encode pada Tabel 2.

KESIMPULAN

Konjektur 1 masih open problem, akan tetapi solusi parsialnya sudah ada untuk $a \equiv 5 \pmod{8}$, $a = 13, 21, 29, \dots, 101, 109, 125, 133$ dan 141. Artikel ini memberikan solusi untuk $a = 125, 133$ dan 141. Kasus $a = 117$ dan $a \geq 149$ untuk $a \equiv 5 \pmod{8}$ belum ada solusinya.

REKOMENDASI

Kami merekomendasikan supaya para peneliti dapat membuktikan *Konjektur 1* untuk semua $a \equiv 5 \pmod{8}$.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada fakultas MIPA atas dukungannya terhadap penelitian ini melalui dana penelitian 4576/UN30.12/HK/2025 tanggal 18 Juli 2025.

DAFTAR PUSTAKA

- Amelia, S. (2022) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4,n,2)$ untuk $n=69$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Batlle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Astuti, F. (2021) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4,n,2)$ untuk $n=69$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Batlle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Berkman, O., Parnas, M. and Roditty, Y. (2001) . 'All cycles are edge-magic', *Ars Combinatoria*, 59(April 2001), pp. 145–151.
- Butar-butur, B.R. (2023) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle Books $B[(4,n),2]$ untuk $n=93$* . Hasil wawancara Pribadi Universitas Bengkulu. Bengkulu.
- Damanik, F. (2020) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Book $B(4,n,2)$: Investigasi Conjecture dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Batlle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Enomoto, H. et al. (1998) . 'Super edge-magic graphs', *SUT Journal of Mathematics*, 34(2), pp. 105–109.
- Figueroa-Centeno, R.M., Ichishima, R. and Muntaner-Batlle, F.A. (2001) . 'The place of super edge-magic labelling among other classes of labelings', *Discrete Mathematics*, 213, pp. 153–168.
- Imran, M., Malik, M.A. and Malik, M.Y.H. (2014) . 'On Super Edge-magic Total Labeling of Certain Classes of Graphs', *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 4(2), p. 49. Tersedia : <https://doi.org/10.26708/ijmsc.2014.2.4.06>.
- Jegan, R., Vijayakumar, P. and Thirusangu, K. (2022) . 'A Coding Algorithm using Super-edge Magic Total Labeling of Extended Duplicate Graphs', *2022 2nd International Conference on Computer Science, Engineering and Applications, ICCSEA 2022*, pp. 1–6. Tersedia : <https://doi.org/10.1109/ICCSEA54677.2022.9936251>.
- Kayathri, K. and Jemima, A.S. (2016) . 'Super edge-magic total labelings of connected unicyclic (p,q)

- graphs with magic constant $p + q + 3$, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 11(3), p. 261. Tersedia : <https://doi.org/10.37622/atam/11.3.2016.261-274>.
- Khusna, R.Q.O. (2022) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4,n,2)$ untuk $n=77$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Battle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Kotzig, A. and Rosa, A. (1970) . 'Magic Valuations of Finite Graphs', *Canadian Mathematical Bulletin*, 13(4), pp. 451–461. Tersedia : <https://doi.org/10.4153/cmb-1970-084-1>.
- Lidia, L. (2024) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4,n,2)$ untuk $n=45$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Battle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Marr, A.M. and Wallis, W.D. (2013) . *Magic Graphs (2nd ed.)*. Springer Science Business Media, New York.
- Nurpenda, N. (2024) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4n2)$ untuk $n=101,109$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Battle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Purnamasari, L. (2018) . *Super Edge Magic Total Labeling dari Cycle-Book: Investigasi Conjecture dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Battle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Saragih, S.R. (2022) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4,n,2)$ Untuk $n=85$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Battle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Sari, L.P. (2022) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4,n,2)$ untuk $n=37$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Battle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Simanihuruk (2020) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle Books $B[(4,n),2]$ untuk $n=13$* . Hasil wawancara Pribadi Universitas, Bengkulu.
- Simanihuruk, M. et al. (2021) . 'A Conjecture on Super Edge-Magic Total Labeling of 4-Cycle Books', *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Edited by S. Solovjovs, 2021, pp. 1–8. Tersedia : <https://doi.org/10.1155/2021/8483926>.
- Sinaga, W.A. (2024) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4,n,2)$ untuk $n=61$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Battle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Sitohang, A.S., Swita, B. and Simanihuruk, M. (2018) . 'On edge magic total labeling of cycle book', *Journal of Physics: Conference Series*, 1116(2). Tersedia : <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1116/2/022043>.
- Soraya, K.A. (2024) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4,n,2)$ untuk $n=53$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Battle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.
- Swita, B. et al. (2019) . 'On Edge Magic Total Labeling of $(7, 3)$ -Cycle Books', *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2019. Tersedia : <https://doi.org/10.1155/2019/1801925>.
- Swita, B. et al. (2021) . 'A case study of an edge-magic total labeling of (a,b) -cycle books', *Journal of Physics: Conference Series*, 1940(1), pp. 0–7. Tersedia : <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1940/1/012008>.
- Swita, B. et al. (2024) . 'An investigation the labeling of graph $C[(4,12),(3,n),2]$ -cycle books', *AIP*

- Conference Proceedings*, 3024(1). Tersedia : <https://doi.org/10.1063/5.0204495>.
- Swita, B. et al. (2025) . 'A Partial Solution to an Open Problem on Super Edge-Magic Total Labelings of $(4, 3)$ -Cycle Books Graphs', *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2025(1), pp. 2–10. Tersedia : <https://doi.org/10.1155/ijmm/5582258>.
- Triyani, T., Nurshiami, S.R.T., Estri, M.N. (2013) . 'Aplikasi Himpunan Kritis Pada Pelabelan Graf Caterpillar Teratur', *Jurnal Matematika Integratif*, 9, pp. 53–56. Tersedia : <https://doi.org/https://doi.org/10.24198/jmi.v9.n1.10197.53-60>.
- Yani, N.A. (2020) . *Super Edge Magic Total Labeling pada Graph 4-Cycle-Books $B(4, n, 2)$ untuk $n=21$: Investigasi Conjecture Dari Figueroa-Centeno Ichishima dan Muntaner-Batlle*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu: Tidak dipublikasikan.