Teorema: *Teori dan Riset Matematika*, *5*(2), 211–222, September 2020
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2020
https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/article/view/3671

PERTEMUAN RUMUS COSINUS DAN SINUS DENGAN HAVERSINE DALAM PERHITUNGAN ARAH KIBLAT

Agus Solikin
Universitas Islam Negeri Sunan Ampel Surabaya, Jl. A. Yani No 117 Surabaya, Indonesia
Email: agussolikin2@gmail.com

ABSTRACT

Qibla direction calculation formula there are four calculation formulas namely cosine and sine formula, napier analogy formula, cosine formula and assist angle, and haversine formula. In this regard, what needs to be considered is the gap in the use of the calculation formula. The cosine and sine formulas are often used in calculating the Qibla direction in the celestial literature, while the haversine formula is rarely used. In line with that, according to the opinion of the authors between the two formulas are interrelated, so this research has the aim to answer the problem formulation which is related to the meeting of cosine and sine formulas with the Haversine formula in calculating the Qibla direction. Answering the formulation of the problem, this study was designed in a qualitative descriptive study, with sources of literature data related to the research focus. Data was collected by reviewing these documents, then the collected data were analyzed using inductive descriptive analytical methods which ended with drawing conclusions. Based on the research that has been done, it can be concluded that the meeting of the cosine and sine formulas with the Haversine formula in the calculation of the Qibla direction meet in the concept of spherical triangle, and if applied and if applied in calculating the direction of the Muslim prayer then have the possibility of the same or different results. If the results of the two formulas are different, but actually show the same direction.

Keywords: Cosine and sine formulas, haversine, qibla direction.

ABSTRAK

Rumus perhitungan arah kiblat ada empat rumus perhitungan yaitu rumus cosinus dan sinus, rumus analogi napier, rumus cosinus dan sudut bantu, serta rumus haversine. Berkenaan dengan hal itu, yang perlu diperhatikan yaitu, adanya kesenjangan penggunaan rumus perhitungan tersebut. Rumus cosinus dan sinus sering digunakan dalam perhitungan arah kiblat pada literatur-literatur falak, sedangkan rumus haversine jarang digunakan. Selaras dengan hal itu, menurut hemat penulis antara dua rumus tersebut saling memiliki keterkaitan, sehingga penelitian ini memiliki tujuan untuk menjawab rumusan masalah yaitu berkaitan tentang pertemuan rumus cosinus dan sinus dengan rumus haversine dalam perhitungan arah kiblat. Menjawab rumusan masalah tersebut, maka penelitian ini dirancang dalam penelitian deskriptif kualitatif, dengan sumber data literatur-literatur yang terkait dengan fokus penelitian. Data dikumpulkan dengan cara penelaahan dokumen-dokumen tersebut, selanjutnya data yang terkumpul dianalisis dengan metode deskriptif analitis induktif yang diakhiri dengan penarikan kesimpulan. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat diambil kesimpulan bahwa pertemuan rumus cosinus dan sinus dengan rumus haversine dalam perhitungan arah kiblat bertemu dalam konsep segitiga bola, dan jika diaplikasikan dalam perhitungan arah salat umat Islam maka memiliki kemungkinan hasil yang sama atau berbeda. Jika hasil kedua rumus berbeda, namun sejatinya menunjukkan arah yang sama jika dihubungkan dengan konsep azimut.

Kata kunci: Arah kiblat, haversine, rumus cosinus dan sinus

Dikirim: 20 Juli 2020; Diterima: 25 Agustus 2020; Dipublikasikan: 30 September 2020
Cara sitasi: Solikin, A. (2020). Pertemuan rumus cosinus dan sinus dengan haversine dalam perhitungan arah kiblat. *Teorema*: *Teori dan Riset Matematika, 5*(2), 211–222.

PENDAHULUAN

Setiap muslim dalam kesehariannya memiliki kewajiban untuk selalu senantiasa menjalankan ṣalat lima waktu, dan ketika menjalankan kewajibannya tersebut, menghadap kiblat sudah menjadi keharusan yang tak terbantahkan, karena menghadap kiblat menjadi salah satu syarat sahnya ṣalat. Dasar hukum menghadap kiblat dalam ajaran Islam yaitu Q.S. *Al-Baqarah* (*2*) ayat 144.

> *"Sungguh kami* (*sering*) *melihat mukamu menengadah ke langit [96], Maka sungguh kami akan memalingkan kamu ke kiblat yang kamu sukai. palingkanlah mukamu ke arah Masjidil Haram. dan dimana saja kamu berada, palingkanlah mukamu ke arahnya. dan Sesungguhnya orang-orang* (*Yahudi dan Nasrani*) *yang diberi Al Kitab* (*Taurat dan Injil*) *memang mengetahui, bahwa berpaling ke Masjidil Haram itu adalah benar dari Tuhannya; dan Allah sekali-kali tidak lengah dari apa yang mereka kerjakan."*

Membahas tentang penentuan arah kiblat, pada hakikatnya yaitu melakukan perhitungan arah dua tempat dari suatu tempat tertentu menuju ke Ka'bah, dan arah dalam hal ini merupakan jarak *sferis*. Jarak *sferis* antara dua tempat A dan B adalah jarak terpendek pada permukaan bola di tempat tersebut (Koesdiono, 2002).

Perhitungan arah kiblat dalam khazanah keilmuan islam dipelajari dalam ilmu falak. Sedangkan, perhitungan yang dalam bahasa Arab disebut dengan *alḥisāb* (Alkalali, 1981) dengan kata dasar *ḥāsaba – yuḥāsibu – muḥāsabatan – ḥisāban* (Anugraha, 2012) sehingga ilmu falak disebut juga dengan ilmu *ḥisāb.* Anugraha (2012) menjelaskan bahwa:

> "Ilmu *ḥisāb* memang bermakna ilmu untuk menghitung posisi benda langit (matahari, bulan, planet-planet dan lain-lain). Yang memiliki akar kata yang sama dengan kata "hisab" adalah kata "husban" yang berarti perhitungan. Kata "husban" disebutkan dalam Al Qur'an untuk menyatakan bahwa pergerakan matahari dan bulan itu dapat dihitung dengan ketelitian sangat tinggi."

Selain itu, ilmu falak yang tidak bisa dilepaskan dengan perhitungan, juga memiliki nama-nama lain seperti dalam bahasa Inggris disebut dengan astronomi, ada juga yang menyebut ilmu falak sebagai ilmu hisab yang berarti perhitungan (*arithmatic*) (Hambali, 2011).

Berdasarkan hal tersebut, maka dapat diambil sebuah hubungan yang erat antara fiqih dan falak berkaitan dengan perhitungan arah kiblat. Sedangkan, ilmu falak tidak bisa terlepas dengan kaidah matematik, maka pada akhirnya diperoleh kesimpulan bahwa dalam perhitungan arah kiblat antara fiqih dan matematika harus terjadi keterpaduan (Solikin, 2017). Selain itu, dalam praktiknya perhitungan arah kiblat sangat dipengaruhi oleh pendeskripsian dan pemahaman akan bentuk bumi. Bumi dalam banyak hal pada literatur falak dideskripsikan berbentuk bola, walapun perkembangan ilmu astronomi telah membuktikan bahwa sebenarnya bumi tidak seperti bola atau bulat penuh, melainkan pipih di kedua kutubnya, dengan diameter kutub 12.713,56 KM, sedangkan diameter equatornya 12.756,28 KM. Pendeskripsian bumi bentuknya seperti bola dengan jari-jari 6370 KM akan memudahkan dalam proses perhitungan, dan hasilnya juga sudah cukup akurat. (Purwanto, 2012). Selaras dengan ini, mengakibatkan rumus perhitungan arah kiblat tidak bisa dilepaskan dengan aturan-aturan perhitungan yang ada dalam konsep bola.

Rumus perhitungan arah kiblat yang didasari akan pemahaman bentuk Bumi seperti bola dan sering dijadikan metode dan acuan perhitungan arah kiblat dalam lieratur-literatur falak yaitu rumus cosinus dan sinus. Namun, kalau ditelisik lebih jauh rumus perhitungan arah kiblat dengan rumus tersebut bukanlah satu-satunya rumus (Nawawi, 2010). Rumus lain yang bisa digunakan dalam perhitungan arah kiblat yaitu rumus sudut bantu, rumus analogi napier, dan rumus haversine (Azhari, 2007).

Gambaran sederhana tentang keempat rumus tersebut yaitu:

1. Rumus cosinus dan sinus (Azhari, 2007) didefinisikan sebagai berikut.

   Cotg B = $\frac{ctg\ b \sin a + \cos a \cos C}{\sin C}$

   Atau

   Cotg B = $\frac{ctg\ b \sin a}{\sin C}$ – cos a ctg C

   Dimana,

   B : Sudut arah kiblat. Jika hasilnya positif maka arah kiblat dihitung dari utara, dan jika negatif dihitung dari selatan.
   C : Selisih bujur tempat dengan bujur ka'bah
   A : Busur $(90^0 - \phi T)$
   B : Busur $(90^0 - \phi k)$
   ϕT : Lintang tempat pengamat, jika ϕT adalah lintang selatan, maka negatif dan untuk ϕT adalah lintang utara, maka positif
   ϕk : Lintang ka'bah

2. Menggunakan analogi Napier (Azhari, 2007) didefiniskan sebagai berikut.

   Tan $\frac{1}{2}$ (A + B) = $\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$ cotan $\frac{1}{2}$ C

   Tan $\frac{1}{2}$ (A - B) = $\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$ cotan $\frac{1}{2}$ C

   B = $\frac{1}{2}$ (A + B) - $\frac{1}{2}$ (A - B)

   Dimana, B adalah arah kiblat dari utara ke barat.

   Dimana,

   B : Sudut arah kiblat. Jika hasilnya positif maka arah kiblat dihitung dari utara, dan jika negatif dihitung dari selatan.
   C : Selisih bujur tempat dengan bujur ka'bah
   a : Busur $(90^0 - \phi T)$
   b : Busur $(90^0 - \phi k)$
   ϕT : Lintang tempat pengamat, jika ϕT adalah lintang selatan, maka negatif dan untuk ϕT adalah lintang utara, maka positif
   ϕk : Lintang ka'bah

3. Menggunakan rumus coxinus dan sudut bantu (Azhari, 2007) didefinisikan:

   Tan P = tan b cos C

   Cotan B = $\frac{cotan\ C \sin(a-P)}{\sin P}$

4. Havesine didefinisikan:

   Hav = hav (a – b) + sin a sin b hav C

   S = $\frac{1}{2}$ (a+b+c)

   Hav B = sin (s-a) sin (s-c) cossec a cossec C

Keempat rumus perhitungan arah kiblat sebagaimana disebutkan adalah rumus perhitungan arah yang semuanya berdasarkan pemahaman bentuk bumi yang dideskripsikan seperti bola. Berkenaan dengan hal itu, maka secara sederhana dapat diindikasikan bahwa antar rumus tersebut saling memiliki hubungan.

Atas dasar pemikiran tersebut dan guna mengetahui hubungan antar rumus perhitungan arah kiblat, penelitian ini difokuskan pada tujuan untuk mencari hubungan atau pertemuan rumus perhitungan arah kiblat antara rumus cosinus dan sinus dengan rumus haversine. Diambilnya rumus cosinus dan sinus yang dihubungkan dengan rumus haversine dalam perhitungan arah kiblat bukan tanpa alasan yang rasional. Rumus cosinus dan sinus memiliki perbedaan posisi dengan rumus haversine. Rumus cosinus dan sinus sudah familiar dalam literartur-literatur ilmu falak (Shodiq, 1994), sedangkan rumus haversine jarang (atau bahkan) tidak pernah diperbincangkan dalam lietratur-literatur falak. Pertemuan antara kedua rumus tersebut, sebagaimana dijelaskan sebelumnya, maka dalam penelitian ini pertemuan yang dimaksud yaitu pertemuan yang ditinjau dari kontruksi, proses dan hasil perhitungan kedua rumus tersebut dalam perhitungan arah kiblat.

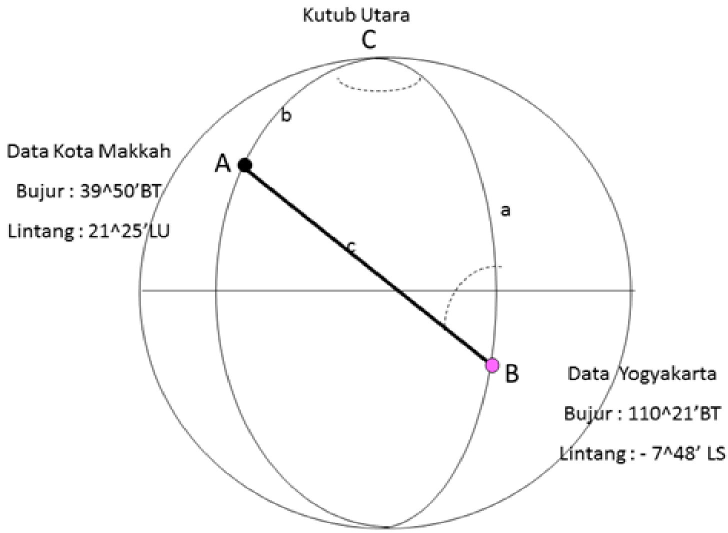
METODE PENELITIAN

1. Jenis dan Sumber Data Penelitian
   a. Jenis Penelitian
   Menurut Suryana (2010) menyatakan bahwa penelitian dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu berdasarkan sifat masalahnya dan berdasarkan tujuannya. Berdasarkan sifat masalahnya penelitian ini dirancang sebagai penelitian deskriptif yang bertujuan untuk membuat deskripsi secara sistematis, faktual dan akurat mengenai fakta-fakta yang ada, terkait dengan relasi rumus cosinus dan sinus dengan rumus haversine dalam perhitungan arah salat umat Islam.
   b. Sumber Data Penelitian
   Secara terperinci, sumber data dalam penelitian ini ada tiga yaitu sumber data primer, sumber data skunder dan sumber data tersier. Sumber data primer dalam penelitian ini yaitu buku yang berkaitan dengan rumus cosinus dan sinus serta rumus haversine dalam segitiga bola. Sumber data skunder dalam penelitian ini adalah karya-karya lain dari ilmu falak baik yang langsung berkaitan atau tidak berkaitan dengan objek penelitian. Sedangkan sumber data tersier dalam penelitian ini yaitu karya-karya lain yang ada relevansi dengan objek penelitian yaitu masalah perhitungan arah kiblat.
2. Metode Pengumpulan Data
   Metode pengumpulan data pada penelitian ini yaitu dengan dokumentasi penelaahan dokumen-dokumen yang terkait dengan obyek penelitian, penelaahan dokumen dilakukan dengan secermat mungkin dan diupayakan diambil dari sumber dokumen aslinya.
3. Metode Analisis Data
   Data yang diperoleh diklasifikasikan ke dalam data utama dan data pendukung. Kemudian data di analisis dengan menggunakan metode deskriptif analitis induktif. Selain itu, untuk analisis hasil perhitungan arah kiblat dengan menggunakan keempat rumus tersebut, maka dalam perhitungannya digunakan alat bantu kalkulator. Kalkulator yang digunakan yaitu kalkulator casio dengan tipe *fx-350MS.*

HASIL DAN PEMBAHASAN

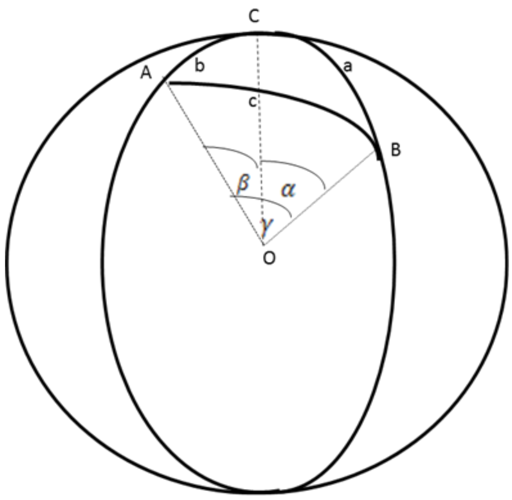
A. Analisis Konstruksi Rumus Cosinus dan Sinus Perhitungan Arah Kiblat

Sebelum memulai analisis rumus cosinus dan rumus sinus terlebih dahulu perlu dipahami bahwa pembahasan dalam tahap ini yaitu terkait dengan perhitungan arah kiblat, sedangkan implementasi di lapangan terkait dengan hasil perhitungan tersebut, dalam kajian ilmu falak berada pada bagian tahap pengukuran arah kiblat. Selaras dengan itu, guna memahamai tentang asal usul rumus perhitugan arah kiblat maka penulis memulai kajiannya dengan cara mengambil contoh posisi tempat yang akan dilakukan perhitungan yaitu Yogyakarta dengan posisi ka'bah. Posisi dua tempat tersebut dapat digambarkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Posisi dua tempat yaitu Ka'bah dan Yogyakarta

Untuk memudahkan analisis matematisnya, maka Gambar 1 dapat disederhanakan menjadi Gambar 2.



Gambar 2. Penyederhanaan dari Gambar 1

Dari Gambar 2 diperoleh segitiga bola ABC dengan panjang sisi a, b, dan c serta sudut-sudutnya yaitu CAB, ABC, dan BCA. Berdasarkan gambar tersebut pula diketahui bahwa:

1. Dalam Gambar 2 tersebut ada dua tempat yaitu A dan B. A berada dalam lintang (ϕ) dan bujur (λ) tertentu, yang selanjutnya ditulis dengan ϕ A dan λ A. begitu pula dengan B juga berada dalam lintang (ϕ) dan bujur (λ) tertentu, yang selanjutnya ditulis dengan ϕ B dan λ B.
2. Berdasarkan Gambar 2 tersebut, dapat diambil sebuah segitiga bola ABC, dengan sisi-sisinya yaitu a, b, dan c. Panjang masing-masing sisi secara matematis dapat ditentukan dengan rumus:
   A = 90^0 - lintang tempat yang akan diukur = 90^0 - ϕB
   B = 90^0 - lintang tempat Ka'bah = 90^0 - ϕA
   C = Selisih bujur tempat ayang akan diukur dengan bujur ka'bah = (λA- λB)

Selanjutnya, dengan menggunakan aturan cosinus dalam segitiga bola maka akan diperoleh sebuah persamaan:

Cos b = cos a cos c + sin a sin c cos B ……................................. (1)
Cos c = cos a cos b + sin a sin b cos C ……................................. (2)

Persamaan (2) disubtitusikan ke persamaan (1).

Cos b = cos a cos c + sin a sin c Cos B

= Cos a (cos a cos b + sin a sin b cos C) + sin a sin c cos B

= $\cos^2 a \cos b$ + cos a sin a sin b cos C + sin a sin c cos B

Karena. $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, sehingga diperoleh:

Cos b = $\cos^2 a \cos b$ + cos a sin a sin b cos C + sin a sin c cos B

= (1 - $\sin^2 a$) cos b + cos a sin a sin b cos C + sin a sin c cos B

= Cos b - $\sin^2 a$ cos b + cos a sin a sin b cos C + sin a sin c cos B

Cos b + $\sin^2 a$ cos b = Cos b + cos a sin a sin b cos C + sin a sin c cos B

$\sin^2 a$ cos b = Cos b – cos b + cos a sin a sin b cos C + sin a sin c cos B

= cos a sin a sin b cos C + sin a sin c cos B

Selanjutnya kedua ruas dibagi dengan sin a sin b, dan diperoleh:

$$\frac{\sin^2 a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B}{\sin a \sin b}$$

$$\text{Sin a} \frac{\cos b}{\sin b} = \text{Cos a cos C} + \frac{\sin c}{\sin b} \text{cos B}$$

Sedangkan menurut aturan sinus dalam segitiga bola, $\frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin B}$ (Murray, 1908), maka

$$\text{Sin a} \frac{\cos b}{\sin b} = \text{Cos a cos C} + \frac{\sin c}{\sin b} \text{cos B}$$

$$\text{Sin a cotan b} = \text{Cos a cos C} + \frac{\sin C}{\sin B} \text{cos B}$$

$$= \text{Cos a cos C + sin C cotan B}$$

Cos a cos C + sin C cotan B = Sin a cotan b

sin C cotan B = Sin a cotan b - Cos a cos C

$$\text{Cotan B} = \frac{\text{Sin a cotan b} - \text{Cos a cos C}}{\sin C}$$

$$\text{Cotan B} = \frac{\text{Sin a cotan b}}{\sin C} - \frac{\text{Cos a cos C}}{\sin c}$$

$$\text{Cotan B} = \frac{\text{Sin a cotan b}}{\sin C} - \text{cos a cotan C} \quad \text{...} (3)$$

Persamaan (3) inilah yang kemudian dikenal dengan rumus arah kiblat rumus cosinus dan rumus sinus. Dimana,

A = 90^0 - lintang tempat yang akan diukur = 90^0 - ϕB

B = 90^0 - lintang tempat Ka'bah = 90^0 - ϕA

C = Selisih bujur tempat ayang akan diukur dengan bujur ka'bah (λA - λB)

Selain itu, persamaan (3) tersebut bisa transformasikan kedalam bentuk lain, sebagai berikut:

$$\text{Cotan B} = \frac{\text{Sin a cotan b}}{\sin c} - \text{cos a cotan C}$$

$$\frac{1}{\tan B} = \frac{\text{Sin a cotan b} - \text{Cos a cos C}}{\sin C}$$

$$\text{Tan B} = \frac{\sin C}{\text{Sin a cotan b} - \text{Cos a cos C}} \quad \text{...} (4)$$

Mengingat,

a = 90^0 - ϕB

B = 90^0 - ϕA

C = λA – λB

cos (90 – x) = sin(x)
Sin (90 – x) = cos (x)
cot (90 – x) = tan (x)
Sehingga,

Sin a = Sin (90^0 - ϕB) = Cos ϕB
Cos a = cos (90^0 - ϕB) = Sin ϕB
$\cot\text{an } b$ = Cotan (90^0 - ϕA) = Tan ϕa

Sehingga dengan demikian persamaan (4) menjadi,

Tan B = $\frac{\sin C}{\text{Sin a cotan b} - \text{Cos a cos C}}$

Tan B = $\frac{\sin C}{\text{Cos } \phi\text{B Tan } \phi\text{ A} - \text{Sin } \phi\text{B cos C}}$ .... (5)

Persamaan (5) ini merupakan rumus arah kiblat yang lain dengan menggunakan rumus cosinus dan rumus sinus. Dan menurut penulis perasamaan (5) lebih mudah dipelajari oleh pemula dengan menggunakan kalkulator, hal ini bisa dilihat dalam penjelasan berikutnya.

B. Analisis Rumus Haversine Perhitungan Arah Kiblat

Smart (1997) menjelaskaan bahwa haversine yang biasa ditulis dengan "hav" didefinisikan sebagai berikut:

Hav α = $\frac{1}{2}$(1 – cos α) .... (6)

Karena, sin $\frac{1}{2}$ α = ± $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, maka

$\sin^2 \frac{1}{2}\ \alpha = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, sehingga persamaan (6) menjadi:

Hav α = $\frac{1}{2}$ (1 – cos α)

= $\frac{1-\cos\alpha}{2}$

= $\sin^2 \frac{1}{2}\ \alpha$ .... (7)

Dalam rumus jumlah dan selisih sudut pada trigonometri dijelaskan bahwa:
Cos 2A = 1 – 2 $\sin^2 A$

Sekarang A = $\frac{1}{2}$ α, maka persamaan tersebut menjadi:

Cos 2 $\left(\frac{1}{2}\ \alpha\right)$ = 1 - 2 $\sin^2 \left(\frac{1}{2}\alpha\right)$

Cos α = 1 – 2 $\sin^2 \frac{1}{2}\ \alpha$ .... (8)

Persamaan (6) disubtitusikan ke persamaan (8) sehingga menjadi:

Cos α = 1 – 2 $\sin^2 \frac{1}{2}\ \alpha$

= 1 – 2 hav α ....(9)

Dari aturan cosinus diperoleh bahwa:
Cos a = cos b cos c + sin b sin c cos A
Berdasarkan persamaan (9) dapat diturunkan bahwa:
Cos a = 1 – 2 hav a .... (10)
Cos A = 1 – 2 hav A .... (11)

Persamaan (10) dan (11) disubtitusikan ke persamaan aturan kosinus di atas
Cos a = cos b cos c + sin b sin c cos A
1 – 2 hav a = cos b cos c + sin b sin c (1 – 2 hav A)

$= \cos b \cos c + \sin b \sin c - 2 \sin b \sin c \text{ hav } A$

$= \cos (b - c) - 2 \sin b \sin c \text{ hav } A$

$-2 \text{ hav } a = \cos (b - c) - 2 \sin b \sin c \text{ hav } A - 1$ .... (12)

Dari persamaan (10) bahwa

$\cos \alpha = 1 - 2 \text{ hav } \alpha$, sehingga

$\cos (b - c) = 1 - 2 \text{ hav } (b - c)$ .... (13)

Persamaan (13) disubtitusikan ke persamaan (12)

$-2 \text{ hav } a = \cos (b - c) - 2 \sin b \sin c \text{ hav } A - 1$

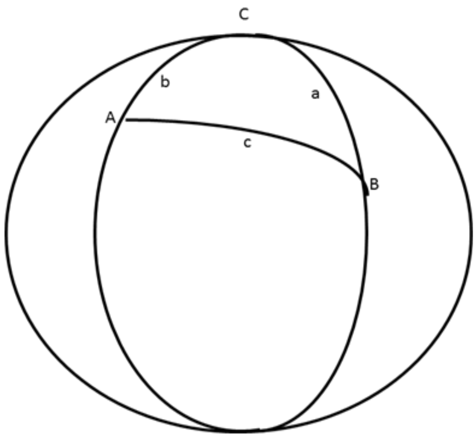
$= 1 - 2 \text{ hav } (b - c) - 2 \sin b \sin c \text{ hav } A - 1$

$= -2 \text{ hav } (b - c) - 2 \sin b \sin c \text{ hav } A$

Kedua ruas dibagi dengan – 2, sehingga diperoleh

$\text{hav } a = \text{hav } (b - c) + \sin b \sin c \text{ hav } A$ .... (14)

Persamaan (14) inilah yang dinamakan rumus haversine yang nantinya akan digunakan untuk menghitung arah kiblat. Namun, agar lebih memahami tentang penggunaan rumus beserta langkah-langkah perhitungan arah kiblat perhatikan Gambar 3.



Gambar 3. Gambar untuk memahami penggunaan rumus beserta langkah-langkah perhitungan arah kiblat

Dalam Gambar 3 ada dua tempat yaitu A dan B. A berada dalam lintang (ϕ) dan bujur (λ) tertentu, yang selanjutnya ditulis dengan ϕ A dan λ A. begitu pula dengan B juga berada dalam lintang (ϕ) dan bujur (λ) tertentu, yang selanjutnya ditulis dengan ϕ B dan λ B.

Berdasarkan Gambar 3, dapat diambil sebuah segitiga bola ABC, dengan sisi-sisinya yaitu a, b, dan c. Panjang masing-masing sisi secara matematis dapat ditentukan dengan rumus:

$a = 90^0 - \phi B$

$b = 90^0 - \phi A$

sedangkan panjang sisi c, dapat dihitung dengan rumus haversine yang diturunkan dari persamaan (14) sebagai berikut:

$\text{hav } a = \text{hav } (b - c) + \sin b \sin c \text{ hav } A$

Karena, yang akan dicari yaitu panjang sisi c, maka a diganti dengan c, sehingga

$\text{hav } c = \text{hav } (a - b) + \sin b \sin c \text{ hav } C$ .... (15)

Dengan C adalah selisih bujur antara dua tempat, yang secara matematis dapat ditulis

$C = \lambda B - \lambda B$

Langkah berikutnya, yaitu akan dihitung arah kiblat yang pada hakikatnya menghitung sudut ABC, dan untuk itu rumus haversine (persamaan 14) diturunkan kedalam sisi b sebagai berikut

$\text{hav } a = \text{hav } (b - c) + \sin b \sin c \text{ hav } A$

Dari persamaan di atas diturunkan ke b menjadi

$\text{hav } b = \text{hav } (a - c) + \sin a \sin c \text{ hav } B$ .... (16)

hav (a - c) + sin a sin c hav B = Hav b

sin a sin c hav B = Hav b - hav (a - c) .... (17)

Berdasarkan definisi haversine dalam persamaan (7) maka persamaan (17) dapat ditulis.

sin a sin c hav B = Hav b - hav (a - c)

$$= \left(\frac{1-\cos b}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos(a-c)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos b) - \frac{1}{2}(1-\cos(a-c))$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-(1-\cos b) + (1-\cos(a-c))\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(-1+\cos b + 1 - \cos(a-c))$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos b - \cos(a-c)) \quad \text{........................... (18)}$$

Misal, b = α dan (a – c) = β , maka persamaan (18) dapat ditulis.

sin a sin c hav B $= -\frac{1}{2}(\cos b - \cos(a-c))$

$$= -\frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos\beta) \quad \text{........................... (19)}$$

Selanjutnya, dalam trigonometri didefinisikan tentang rumus konversi penjumlahan ke perkalian (Bettinger & Englund, 1963) bahwa:

Cos α + cos β $= -2sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Maka persamaan (19) dapat ditulis.

sin a sin c hav B $= -\frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos\beta)$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

$$= sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \quad \text{............................. (20)}$$

Sebagaimana didefinisikan bahwa b = α dan (a – c) = β, maka persamaan (20) menjadi.

sin a sin c hav B $= sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$$= sin\frac{1}{2}(b+(a-c))sin\frac{1}{2}\left(b-(a-c)\right)$$

$$= sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a) \quad \text{.................... (21)}$$

Berikutnya didefinisikan bahwa 2s = a + b + c. Sehingga,

a + b – c = 2s – 2c = 2 (s – c)

b + c – a = 2s – 2a = 2 (s - a)

Sehingga dengan demikian persamaan (60) menjadi

sin a sin c hav B $= sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)$

$$= sin\frac{1}{2}(2(s-c))\sin\frac{1}{2}(2(s-a))$$

$$= \text{Sin}\,(s-c)\,\text{sin}\,(s-a)$$

Hav B $= \frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin a \sin c}$ .... (22)

$$= \text{Sin}\,(s-c)sin\,(s-a)\frac{1}{\sin a}\frac{1}{\sin c}$$

$$= \text{Sin}\,(s-c)sin\,(s-a)\ \text{cossec a cossec c} \quad \text{............ (23)}$$

Persamaan (22) dan (23) inilah yang kemudian digunakan sebagai menghitung arah kiblat dengan menggunakan rumus haversine. Rumus yang ditulis dalam *Buku Ilmu Falak Perjumpaan Khazanah Islam dan Sains Modern* yaitu rumus pada persamaan (23).

Namun, yang perlu diperhatikan dalam perhitungan arah kiblat dengan rumus haversine yaitu sebagai berikut:

a. Hitung panjang sisi c dengan rumus pada persamaan (16)
   Hav c = hav (a - b) + sin b sin c hav C
b. Hitung nilai s dengan rumus
   S = $\frac{1}{2}\,(a+b+c)$
c. Hitung arah kiblat dengan rumus persamaan (22) atau (23)
   Hav B = $\frac{\sin\,(s-c)\sin\,(s-a)}{\sin a \sin c}$ atau
   Hav B = Sin $(s-c) sin\ (s-a)$ cossec a cossec c

C. Contoh Perhitungan Arah Kiblat

Sebelum melakukan perhitungan arah kiblat baik menggunakan rumus aturan sinus cosinus maupun rumus haversine, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan. Menurut Hambali (2011) terkait ketentuan penentuan arah atau perhitungan selisih bujur tempat yang akan dihitung yaitu:

1. Jika $00^0\ 00'$ < (λA) $< 39^0\ 49'\ 34.33''$ BT. Ketentuan pertama ini dibaca bujur tempat lebih dari $00^0\ 00'$ kurang dari $39^0\ 49'\ 34.33''$ BT, maka C = $39^0\ 49'\ 34.33'' - \lambda A$ dengan arah kiblat menghadap kearah Timur.
2. Jika $39^0\ 49'\ 34.33''$ < (λA) < $180^0\ 00'$ BT . Ketentuan kedua dibaca bujur tempat lebih dari $39^0\ 49'\ 34.33''$ kurang dari $180^0\ 00'\ BT,$ maka C = $\lambda A - 39^0\ 49'\ 34.33''$ dengan arah kiblat menghadap kearah barat.
3. Jika $00^0\ 00'$ < (λA) < $140^0\ 10'$ BB. Ketentuan ketiga dibaca bujur tempat lebih dari $00^0\ 00'$ kurang dari $140^0\ 10'\ BB$, maka C = $\lambda A + 39^0\ 49'\ 34.33''$ dengan arah kiblat menghadap kearah Timur.
4. Jika $140^0\ 10'$ < (λA) < $180^0\ 00'$ BB, ketentuan keempat dibaca bujur tempat lebih dari $140^0\ 10'$ kurang dari $180^0\ 00'\ \ BB,$ maka C = 360^0 - $39^0\ 49'\ 34.33''$ - λA dengan arah kiblat menghadap kearah Barat.

Selain itu, dalam kaitannya dengan Azimuth, maka digunakan ketentuan bahwa:

1. Jika nilai arah kiblat (B) = Utara timur (UT), maka azimuthnya = B
2. Jika nilai arah kiblat (B) = Utara barat (UB), maka azimuthnya = 360^0 - B
3. Jika nilai arah kiblat (B) = selatan timur (ST), maka azimuthnya = 180^0 – B, dengan syarat nilai B dipositifkan
4. Jika nilai arah kiblat (B) = selatan barat (SB), maka azimuthnya = 180^0 + B, dengan syarat nilai B dipositifkan

Berdasarkan ketentuan-ketentuan tersebut, maka contoh perhitungan arah kiblat dalam penelitian ini yaitu ada 8 tempat. Delapan tempat tersebut yaitu tercantum pada Tabel 1.

Tabel 1. 8 contoh tempat

No	Tempat	Data astronomis tempat		Keterangan	
		Lintang	Bujur	Ketentuan	Posisi
1	Abisko	$68^O\ 17'$ LU	$18^o 50'$ BT	1	Utara Ka'bah
2	Alpines	$-43^O\ 44'$ LS	$4^o 54'$ BT	1	Selatan Ka'bah
3	Amritsar	$31^O\ 37'$ LU	$74^o 55'$ BT	2	Utara Ka'bah
4	Albany	$-35^O\ 1'$ LS	$117^o 58'$BT	2	Selatan Ka'bah
5	Abilene	$32^O\ 25'$ LU	$99^o 41'$ BB	3	Utara Ka'bah
6	Amazone	$4^O\ 00'$ LS	$63^o 00'$ BB	3	Selatan Ka'bah
7	PointHope	$68^O\ 30'$ LU	$165^o 48'$ BB	4	Utara Ka'bah
8	Tahiti	$-15^O\ 40'$ LS	$150^o 00'$ BB	4	Selatan Ka'bah

D. Pertemuan Rumus Perhitungan Arah Kiblat Antara Rumus Cosinus dan Haversine

Sebelum menganalisis relasi perhitungan arah kiblat antara rumus cosinus dan sinus dengan rumus haversine, maka terlebih dahulu perlu dituliskan rekapitulasi hasil perhitungan arah kiblat yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Rekapitulasi hasil perhitungan arah kiblat

No	Tempat	Data astronomis		Hasil perhitungan rumus	
		Lintang	Bujur	Sinus cosinus	Haversine
1	Abisko	$68^{o}\ 17'$ LU	$18^{o}50'$ BT	$-26^{0}\ 23'\ 4.07''$	$153^{0}\ 36'\ 56''$
2	Alpines	$-43^{o}\ 44'$ LS	$4^{o}54'$ BT	$33^{0}\ 57'\ 12.01''$	$33^{0}\ 57'\ 11.92''$
3	Amritsar	$31^{o}\ 37'$ LU	$74^{o}55'$ BT	$-80^{0}\ 37'\ 55.82''$	$99^{0}\ 22'\ 4.19''$
4	Albany	$-35^{o}\ 1'$ LS	$117^{o}58'$BT	$65^{0}\ 49'\ 40.02''$	$65^{0}\ 49'\ 39.84''$
5	Abilene	$32^{o}\ 25'$ LU	$99^{o}41'$ BB	$41^{0}\ 18'\ 28.6''$	$41^{0}\ 18'\ 28.86''$
6	Amazone	$4^{o}\ 00'$ LS	$63^{o}00'$ BB	$68^{0}\ 55'\ 1.13''$	$68^{0}\ 55'\ 20.31''$
7	PointHope	$68^{o}\ 30'$ LU	$165^{o}48'$ BB	$\mathbf{23^{0}}\ 45'\ 18.13''$	$23^{0}\ 45'\ 18.1''$
8	Tahiti	$-15^{o}\ 40'$ LS	$150^{o}00'$ BB	$56^{0}\ 47'\ 45.64''$	$56^{0}\ 47'\ 45.64''$

Berdasarkan rekapitulasi pada Tabel 2 dapat dilihat bahwa hasil perhitungan arah kiblat dengan menggunakan rumus sinus kosinus dan rumus haversine memilki dua kemungkinan yaitu hasil perhitungan sama (no 2, 4, 5, 6, 7, 8) dan hasil perhitungan tidak sama (no 1 dan 3). Selanjutnya, yang menarik untuk dicermati yaitu jika hasil perhitungan kedua rumus tersebut menghasilkan hasil perhitungan yang tidak sama. Sebagaimana contoh no 1, dimana dengan menggunakan rumus sinus dan kosinus dalam perhitungan arah kiblat menghasilkan $-26^{0}\ 23'\ 4.07''$ sedangkan dengan menggunakan rumus havesine menghasilkan $153^{0}\ 36'\ 56''$. Sekilas, terlihat berbeda, namun jika hasil perhitungan dengan mengunakan rumus sinus kosinus di tambah dengan 180^{0} ($-26^{0}\ 23'\ 4.07'' + 180^{0}$) maka akan menghasilkan $153^{0}\ 36'\ 56''$

Begitu pula dengan contoh nomor 3, dalam perhitungan arah kiblat dengan menggunakan rumus aturan sinus dan kosinus menghasilkan arah kiblat yaitu $-80^{0}\ 37'\ 55.82''$, dan jika hasil ini ditambah dengan 180^{0}, maka hasilnya menjadi $99^{0}\ 22'\ 4.19''$, yang mana nilai ini hampir sama dengan nilai hasil perhitungan arah kiblat dengan menggunakan rumus haversine yaitu $99^{0}\ 22'\ 4.19''$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pemaparan sebelumnya, akhirnya dapat disimpulkan relasi perhitungan arah kiblat dengan menggunakan rumus aturan sinus dan kosinus dengan rumus haversine yaitu: (a) rumus perhitungan arah kiblat dengan menggunakan aturan sinus dan kosinus berangkatnya dari rumus sinus dan kosinus dalam segitiga bola, sedangkan rumus perhitungan arah kiblat haversine berangkat dari persamaan Hav α = $\frac{1}{2}$(1 – cos α); (b) dalam perhitungan arah kiblat dengan aturan sinus dan kosinus memperhitungkan jarak dua tempat dengan cara menghitung selisih bujur antara dua tempat, sedangkan rumus haversine memperhitungkan jarak dua tempat tersebut dengan menggunakan rumus haversine sendiri, yang dalam proses perhitungannya disimbolkan dengan menghitung panjang c (hav c); dan (c) kaitannya dengan hasil perhitungan arah kiblat, kedua rumus tersebut memiliki dua kemungkinan yaitu hasil yang sama dan berbeda, hasil perhitungan arah kiblat memiliki perbedaan jika hasil perhitungan arah kiblat dengan menggunkan rumus aturan sinus dan kosinus bertanda negatif.

REKOMENDASI

Berdasarkan uraian mulai awal hingga akhir, penulis merekomendasikan bahwa jika hasil perhitungan arah kiblat berbeda dengan menggunakan kedua rumus tersebut, maka langkah berikutnya yaitu coba untuk melakukan perhitungan azimuth kiblat.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Universitas Islam Negeri Sunan Ampel Surabaya yang telah memberikan dukungan kepada penulis dalam melakukan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Alkalali, A. M. (1981). *Kamus Indonesia Arab*. Jakarta: Bulan Bintang.

Anugraha, R. (2012). *Mekanika benda langit.* Yogyakarta: Jurusan Fisika Fakultas MIPA Universitas Gajah Mada.

Azhari, S. (2007). *Perjumpaan khazanah islam dan sains modern*. Yogyakarta: Suara Muhammadiyah.

Bettinger, A. K., & Englund, J. A. (1963). *Algebra and trigonometry, seranton.* International Texbook Company.

Departemen Agama RI. (2005). *Al-Qur'an dan terjemahnya.* Bandung: JUMÃNATUL 'ALĪ-ART.

Hambali, S. (2011). *Ilmu falak.* Semarang: Program Pascasarjana IAIN Walisongo Semarang.

Koesdiono. (2002). *Ilmu ukur segitiga bola*. Bandung: Jurusan teknik geodesi, Institut Teknologi Bandung.

Murray, D. A. (1908). *Spherical trigonometry.* New York: Longmans, Green, and Co.

Nawawi, A. S. (2010). *Ilmu falak cara praktis menghitung waktu salat arah kiblat dan awal bulan*. Sidoarjo: Aqaba.

Purwanto, A. (2012). Penentuan arah kiblat. *Makalah pelatihan hisab falak PWM Jatim*.

Shodiq, S. (1994). *Ilmu falak 1*. Surabaya: Fakultas Syari'ah Universitas Muhammadiyah Surabaya.

Smart, W. M. (1997). *Text book on spherical astronomy*. Cambride: Cambridge University Press.

Solikin, A. (2017). *Matematika falak*. Cirebon: Lovrinz.

Suryana. (2010). *Metode penelitian model praktis penelitian kuantitatif dan kualitatif*. Bandung: UPI.