Teorema: *Teori dan Riset Matematika*, *6*(2), 130–138, September 2021
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2021
https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/article/view/5300

KEAKURATAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN UNTUK MASALAH NILAI AWAL YANG PENYELESAIAN EKSAKNYA MEMUAT TITIK SINGULAR

Yulius Keremata Lede[1], Sudi Mungkasi[2]
[1] Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP Weetebula, Sumba Barat Daya, Nusa Tenggara Timur, Indonesia
[2] Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia
Email: [1]yuliusllede@gmail.com

ABSTRACT

One of the branches of mathematics is differential equations. This paper solves the initial value problem (an ordinary differential equation equipped with an initial value of the function) using the Adomian decomposition method. This paper aims to examine the properties of the Adomian decomposition solution when the exact solution contains a singular point. This paper takes a test case for differential equations to demonstrate the performance of the Adomian decomposition method. The research method applied is the method of solving mathematical equations by approximation into a series of functions and observing the results of computer simulations. Results of our test case simulations show that the Adomian decomposition solution is very accurate for the points around the starting point. However, the Adomian decomposition solution is less accurate for points around the singular point and points far from the starting point. The accuracy of the approximation here is defined by the absolute error of that approximation, that is, the approximation is said to be accurate if the absolute error is small.

Keywords: Initial value problems, Adomian decomposition method, ordinary differential equations.

ABSTRAK

Salah satu cabang ilmu matematika adalah persamaan diferensial. Artikel ini menyelesaikan masalah nilai awal (persamaan diferensial biasa yang dilengkapi dengan suatu data nilai awal fungsi) dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengamati sifat penyelesaian dekomposisi Adomian apabila penyelesaian eksaknya memuat titik singular. Artikel ini mengambil suatu kasus uji persamaan diferensial untuk menunjukkan kinerja metode dekomposisi Adomian. Metode penelitian yang diterapkan adalah metode penyelesaian persamaan matematis secara hampiran ke dalam deret fungsi dan pengamatan hasil simulasi komputer. Hasil dari simulasi kasus uji menunjukkan bahwa penyelesaian dekomposisi Adomian sangat akurat untuk titik-titik di sekitar data awal. Akan tetapi, penyelesaian dekomposisi Adomian kurang akurat untuk titik-titik di sekitar titik singular dan untuk titik-titik yang jauh dari titik awal. Keakuratan di sini diartikan dengan nilai error mutlak dari hampiran, yaitu bahwa hampiran disebut akurat apabila error mutlaknya kecil.

Kata kunci: Masalah nilai awal, metode dekomposisi Adomian, persamaan diferensial biasa

Dikirim: 26 April 2021; Diterima: 29 Juli 2021; Dipublikasikan: 30 September 2021
Cara sitasi: Lede, Y. K., & Mungkasi, S. (2021). Keakuratan metode dekomposisi adomian untuk masalah nilai awal yang penyelesaian eksaknya memuat titik singular. *Teorema*: *Teori dan Riset Matematika, 6*(2), 130-138. DOI: http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v6i2.5300

PENDAHULUAN

Salah satu cabang ilmu matematika adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang menyatakan hubungan antara turunan dari satu atau lebih variabel non-independen dengan satu atau lebih variabel independen. Dengan kata lain, persamaan diferensial adalah persamaan atas sejumlah fungsi dari satu atau lebih variabel, yang mempunyai hubungan antara nilai-nilai fungsi dan turunannya pada beberapa orde (Wazwaz, 2009). Makalah ini fokus pada persamaan diferensial biasa dengan suatu data nilai awal. Secara khusus, makalah membahas penyelesaian persamaan diferensial biasa melibatkan satu variabel non-independen atas satu variabel independen.

Sering kali penyelesaian eksak masalah nilai awal atas diferensial biasa sulit untuk dicari penyelesaian eksaknya. Oleh sebab itu, penyelesaian hampiran merupakan suatu alternatif untuk mendapatkan penyelesaian non-eksak atas masalah nilai awal. Salah satu metode hampiran adalah metode dekomposisi Adomian yang telah banyak diterapkan dalam berbagai penelitian, misalnya bidang fisika (Dispini & Mungkasi, 2016; Dispini & Mungkasi, 2017; Mungkasi & Dheno, 2017), masalah teknik (Mungkasi & Ekaputra, 2018), dan ilmu biologi (Putranto & Mungkasi, 2017).

Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial, baik linear maupun nonlinear (Li & Pang, 2020). Metode ini dapat diterapkan meskipun data awal belum diketahui secara pasti (Lu & Zheng, 2021; Silva & De Bortoli, 2021). Metode dekomposisi Adomian dapat digunakan untuk memberikan penyelesaian analitis dalam bentuk deret tak-hingga tanpa linearisasi, perturbasi, atau transformasi diskritisasi yang dapat dilihat dalam penelitian Donachali & Jafari (2020); Gahgah *et al.,* (2020); Saelao & Yokchoo (2020); Yun *et al*., (2019).

Tujuan dari makalah ini adalah untuk memeriksa keakuratan metode dekomposisi Adomian dalam menyelesaikan masalah nilai awal yang memuat titik singular pada penyelesaian eksaknya. Sebagai kasus uji, dipilih suatu masalah nilai awal yang penyelesaian eksaknya diketahui dan mempunyai titik singular. Perlu diingat bahwa secara umum, penyelesaian eksak masalah nilai awal sulit dicari. Dengan hasil penelitian dalam makalah ini, kehati-hatian diperlukan dalam menerapkan metode dekomposisi Adomian, khususnya apabila secara teori diketahui bahwa penyelesaian eksaknya mempunyai titik singular, meskipun bentuk eksplisit penyelesaian eksaknya tidak diketahui. Kehati-hatian di sini adalah perlunya pengetahuan bahwa error di sekitar titik singular bisa sangat besar. Fenomena inilah yang diteliti dalam makalah ini.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal dalam makalah ini adalah metode dekomposisi Adomian dan metode penyelesaian eksak. Sebagai catatan bahwa fokus makalah ini adalah metode dekomposisi Adomian. Metode penyelesaian eksak, secara umum tidak selalu dapat diterapkan. Akan tetapi, dalam makalah ini kasus uji dipilih yang penyelesaian eksaknya dapat dicari, sehingga penyelesaian dekomposisi Adomian dapat diamati keakuratannya. Keakuratan di sini diartikan dengan nilai error mutlak dari hampiran, yaitu bahwa hampiran disebut akurat apabila error mutlaknya kecil. Error mutlak didefinisikan sebagai nilai mutlak dari selisih antara nilai eksak dan nilai hampirannya. Dengan demikian, error mutlak dapat dihitung apabila nilai eksaknya diketahui. Apabila metode dekomposisi Adomian dapat menyelesaikan masalah-masalah yang dapat diselesaikan secara eksak dengan error yang kecil, maka hal ini akan memberikan keyakinan bahwa error dari metode ini juga akan kecil untuk masalah-masalah lain yang belum bisa diselesaikan secara eksak.

Metode Dekomposisi Adomian

Sebagai kasus uji, dipandang masalah nilai awal sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + y , \tag{1}$$

dengan

$$y(0) = c , \tag{2}$$

untuk suatu konstan c. Sebagai catatan, masalah (1) dan (2) ini diambil dari Lede (2019) tentang eksplorasi aspek pendidikan dari metode dekomposisi Adomian dalam menyelesaikan sistem persamaan penyakit demam berdarah. Perlu diingat juga dalam kasus ini bahwa nilai awal (2) berupa parameter c yang belum diketahui pasti nilainya. Parameter c ini bisa bernilai real berapapun.

Diambil operator $L = \frac{d(\cdot)}{dt}$, sehingga persamaan (1) dapat ditulis ulang menjadi:

$$Ly = y^2 + y. \tag{3}$$

Jika operator invers $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot)dt$ dikenakan pada persamaan (3), maka diperoleh:

$$L^{-1}Ly = L^{-1}(y^2) + L^{-1}(y), \tag{4}$$

atau ditulis menjadi:

$$y(t) - y(0) = L^{-1}(y^2) + L^{-1}(y), \tag{5}$$

atau

$$y(t) = y(0) + L^{-1}(y^2) + L^{-1}(y). \tag{6}$$

Metode dekomposisi Adomian mengambil bentuk deret sebagai berikut:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \tag{7}$$

dengan jumlahan dari komponen nonlinear dapat diubah sebagai polinomial Adomian

$$y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{dengan} \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} y_k y_{n-k}. \tag{8}$$

Dengan demikian, polinomial Adomian untuk A_n dapat ditulis menjadi:

$$A_0 = y_0^2, \tag{9a}$$

$$A_1 = y_0y_1 + y_1y_0 = 2y_0y_1, \tag{9b}$$

$$A_2 = y_0y_2 + y_1y_1 + y_2y_0 = 2y_0y_2 + y_1^2, \tag{9c}$$

$$A_3 = y_0y_3 + y_1y_2 + y_2y_1 + y_3y_0 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2. \tag{9d}$$

Substitusi persamaan (7)-(9) ke dalam persamaan (6) menghasilkan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y(0) + L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n + L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} y_n, \tag{10}$$

atau diubah menjadi:

$$y_0 + y_1 + y_2 + ... = y(0) + L^{-1}(A_0 + A_1 + A_2 + ...) + L^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + ...). \tag{11}$$

Dengan memperhatikan kedua ruas pada persamaan (11), diperoleh:

$$y_0 = y(0), \tag{12a}$$

$$y_1 = L^{-1}(A_0) + L^{-1}(y_0), \tag{12b}$$

$$y_2 = L^{-1}(A_1) + L^{-1}(y_1), \tag{12c}$$

$$y_3 = L^{-1}(A_2) + L^{-1}(y_2), \tag{12d}$$

sehingga diperoleh:

$$y_0 = y(0), \quad y_{n+1} = L^{-1}(A_n) + L^{-1}(y_n), \tag{13}$$

untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Dengan memperhatikan nilai awal $y(0) = c$ dan persamaan (13), perhitungan untuk hasil hingga iterasi kedua adalah sebagai berikut:

$$y_0 = c, \tag{14a}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= L^{-1}(A_0) + L^{-1}(y_0) \\ &= L^{-1}(y_0^2) + L^{-1}(y_0) \\ &= L^{-1}c^2 + L^{-1}c \\ &= c^2 t + ct, \end{aligned} \tag{14b}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= L^{-1}(A_1) + L^{-1}(y_1) \\ &= L^{-1}(2y_0 y_1) + L^{-1}(c^2 t + ct) \\ &= L^{-1}(2c(c^2 t + ct)) + L^{-1}(c^2 t + ct) \\ &= L^{-1}(2c^3 t + 2c^2 t) + L^{-1}(c^2 t + ct) \\ &= c^3 t^2 + c^2 t^2 + \frac{1}{2}c^2 t^2 + \frac{1}{2}ct^2 \\ &= (c^3 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{1}{2}c)t^2. \end{aligned} \tag{14c}$$

Penyelesaian hasil dekomposisi Adomian sampai iterasi kedua adalah:

$$y = y_0 + y_1 + y_2. \tag{15}$$

Jika nilai y_0, y_1, dan y_2 dari persamaan (14a)-(14c) disubstitusikan ke persamaan (15), maka diperoleh penyelesaian Adomian untuk sebarang nilai awal $y(0) = c$, yaitu fungsi eksplisit kontinu.

$$y = c + (c^2 + c)t + (c^3 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{1}{2}c)t^2. \tag{16}$$

Kasus uji dalam makalah ini mengambil nilai awal

$$y(0) = c = 2. \tag{17}$$

Dengan mengambil kasus uji persamaan (1) dengan nilai awal (17), masalah nilai awal tersebut mempunyai penyelesaian dekomposisi Adomian sampai iterasi kedua, yaitu fungsi eksplisit kontinu.

$$y(t) = 2 + (2^2 + 2)t + (2^3 + \frac{3}{2}\cdot 2^2 + \frac{1}{2}\cdot 2)t^2, \tag{18}$$

atau ditulis

$$y(t) = 2 + 6t + 15t^2. \tag{19}$$

Hasil hampiran ini akan dibandingkan dengan hasil penyelesaian eksak, agar keakuratan hampiran metode dekomposisi Adomian dapat diamati.

Metode Penyelesaian Eksak

Persamaan diferensial (1) dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel sebagai berikut:

$$\frac{dy}{y^2 + y} = dt. \tag{20}$$

Kedua ruas dalam persamaan (20) diambil integralnya, sehingga,

$$\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int dt. \tag{21}$$

Integral pada ruas kiri dari persamaan (21) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{1}{y^2 + y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y + 1}, \tag{22}$$

yang mana nilai A dan B perlu ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{1}{y^2+y}=\frac{Ay+By+A}{y(y+1)}, \tag{23}$$

sehingga diperoleh $A+B=0$ dengan

$$A=1 \text{ dan } B=-1. \tag{24}$$

Jika hasil (24) disubstitusikan ke dalam persamaan (22), maka persamaan (21) dapat ditulis ulang menjadi:

$$\int\frac{dy}{y}+\int-\frac{1}{y+1}dy=\int dt, \tag{25}$$

yang menghasilkan secara eksak fungsi eksplisit:

$$y(t)=\frac{1}{Ce^{-t}-1}, \tag{26}$$

dengan C sebarang konstanta.

Seperti telah disampaikan sebelumnya bahwa dalam makalah ini, nilai awal diambil $y(0)=2$. Substitusi nilai awal ini ke dalam persamaan (26) menghasilkan nilai $C=\frac{2}{3}$. Jadi, penyelesaian masalah nilai awal tersebut adalah

$$y(t)=\frac{2}{3e^{-t}-2}. \tag{27}$$

Penyelesaian eksak ini mempunyai titik singular (yang adalah titik diskontinu) di $t=0.4055$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan hasil perhitungan pada representasi beberapa titik diskrit untuk penyelesaian yang dihasilkan oleh metode dekomposisi Adomian iterasi kedua dan hasil tersebut dibandingkan dengan penyelesaian eksaknya. Dua simulasi diberikan dalam bagian ini. Simulasi pertama mengambil interval $[0,1]$ yang mana di dalam interval ini, penyelesaian eksaknya memuat titik singular. Simulasi kedua mengambil interval $[0,0.1]$ yang mana simulasi ini fokus pada investigasi di titik-titik di sekitar titik awal (nilai awal).

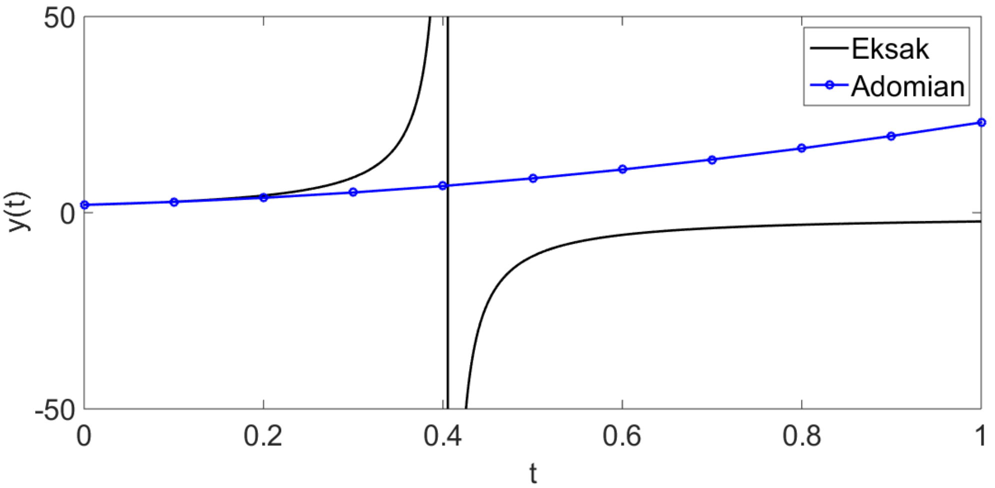
Hasil numeris simulasi pertama dituliskan dalam Tabel 1. Interval $[0,1]$ didiskritkan menjadi titik-titik $t=0.0,0.1,0.2,...,1$. Tabel 1 tersebut melaporkan hasil nilai-nilai penyelesaian dekomposisi Adomian dan penyelesaian eksak serta error mutlak dari penyelesaian dekomposisi Adomian di titik-titik diskrit tersebut. Error mutlak bernilai paling besar di sekitar titik singular yang merupakan titik diskontinu.

Agar lebih jelas dalam pengamatan keakuratan, Gambar 1 memberi ilustrasi kurva penyelesaian dekomposisi Adomian dan penyelesaian eksak pada interval $[0,1]$. Dari gambar ini, dapat diamati bahwa penyelesaian dekomposisi Adomian akurat di sekitar awalan, tetapi tidak akurat di sekitar titik singular dan di titik-titik yang jauh dari awalan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat, metode dekomposisi Adomian memerlukan iterasi yang lebih banyak. Makalah ini mengambil iterasi Adomian hingga pada iterasi kedua saja. Hal ini karena tujuannya adalah untuk mengamati keakuratan metode tersebut jika penyelesaian eksak masalah nilai awal memuat titik singular. Dengan mengambil iterasi hingga pada iterasi kedua, fenomena dari penyelesaian dekomposisi Adomian sudah bisa teramati.

Simulasi kedua fokus pada interval yang lebih kecil, yaitu interval $[0,0.1]$. Hal ini merupakan tindak lanjut lebih rinci dari simulasi pertama yang memberi indikasi bahwa penyelesaian dekomposisi Adomian akurat di sekitar awalan (nilai awal). Interval $[0,0.1]$ didiskritkan menjadi titik-titik $t=0.00,0.01,0.02,...,0.1$. Seperti halnya pada hasil simulasi pertama, simulasi kedua ini juga menghitung nilai penyelesaian dekomposisi Adomian, nilai penyelesaian eksak, dan error mutlak dari penyelesaian dekomposisi Adomian di titik-titik diskrit tersebut. Nilai-nilai ini dituliskan dalam Tabel 2.

Tabel 1. Penyelesaian dekomposisi Adomian dan penyelesaian eksak pada interval $[0,1]$

No.	t	Penyelesaian dekomposisi Adomian	Penyelesaian eksak	Error Mutlak
1	0.0	2.00000000	2.00000000	0.00000000
2	0.1	2.75000000	2.79911224	0.04911224
3	0.2	3.80000000	4.38411647	0.58411647
4	0.3	5.15000000	8.99059602	3.84059602
5	0.4	6.80000000	182.47945240	175.67945240
6	0.5	8.75000000	-11.08598160	19.83598160
7	0.6	11.00000000	-5.65666703	16.65666703
8	0.7	13.54999999	-3.91969264	17.46969264
9	0.8	16.40000000	-3.06742299	19.46742299
10	0.9	19.55000000	-2.56314624	22.11314624
11	1.0	23.00000000	-2.23124220	25.23124220



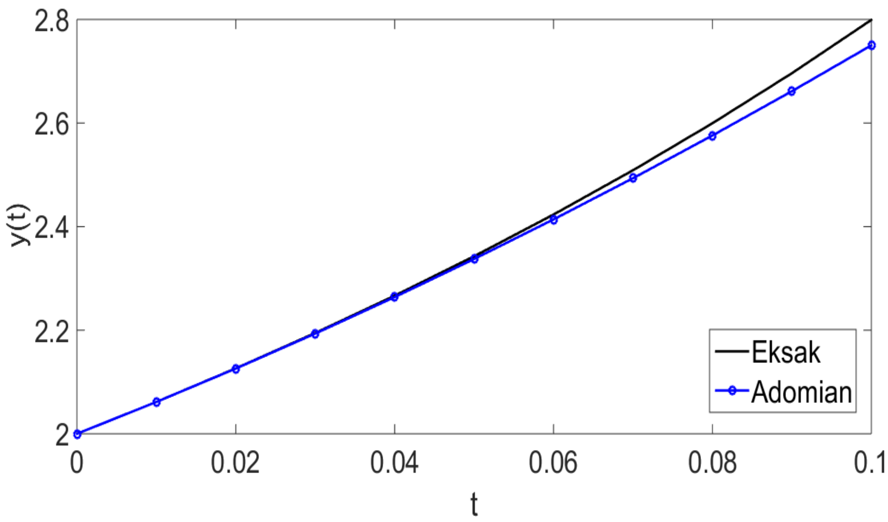
Gambar 1. Kurva penyelesaian dekomposisi Adomian dan penyelesaian eksak pada interval $[0,1]$

Garis hitam lurus vertikal di dekat titik $t = 0.4$ adalah asimtot vertikal $t = 0.4055$ yang adalah titik singular dari penyelesaian eksak masalah nilai awal (1)-(2) dengan $c = 2$.

Untuk memperjelas hasil, Gambar 2 memberikan ilustrasi kurva penyelesaian dekomposisi Adomian dan penyelesaian eksak dalam interval $[0,0.1]$ dari masalah nilai awal yang diberikan. Secara umum, asalkan interval yang diambil cukup kecil dan titik-titiknya cukup dekat dengan titik awal dari masalah yang diberikan, maka penyelesaian dekomposisi Adomian cukup akurat. Semakin jauh titik evaluasi dari titik awal, maka hampiran dekomposisi Adomian akan semakin menjauhi nilai eksaknya.

Tabel 2. Penyelesaian dekomposisi Adomian dan penyelesaian eksak pada interval $[0, 0.1]$

No.	t	Penyelesaian dekomposisi Adomian	Penyelesaian eksak	Error Mutlak
1	0.00	2.00000000	2.00000000	0.00000000
2	0.01	2.06150000	2.06153793	0.00003793
3	0.02	2.12600000	2.12631135	0.00031135
4	0.03	2.19350000	2.19457881	0.00107881
5	0.04	2.26400000	2.26662716	0.00262716
6	0.05	2.33750000	2.34277553	0.00527553
7	0.06	2.41400000	2.42337999	0.00937999
8	0.07	2.49350000	2.50883908	0.01533908
9	0.08	2.57600000	2.59960030	0.02360030
10	0.09	2.66150000	2.69616793	0.03466793
11	0.10	2.75000000	2.79911224	0.04911224



Gambar 2. Kurva penyelesaian masalah nilai awal (1)-(2) dengan $c = 2$ berdasarkan metode dekomposisi Adomian dan kurva penyelesaian eksak pada interval $[0, 0.1]$

Hasil dalam Tabel 1, Gambar 1, Tabel 2, dan Gambar 2 menegaskan bahwa penyelesaian dari hasil perhitungan metode dekomposisi Adomian memberikan hampiran yang akurat di sekitar titik nilai awal. Akan tetapi, hampiran tersebut kurang akurat di sekitar titik singular. Hampiran tersebut juga kurang akurat di titik-titik yang relatif jauh dari titik nilai awal. Hal ini konsisten dengan berbagai hasil tentang perhitungan metode dekomposisi Adomian untuk masalah-masalah lainnya, misalnya hasil penelitian oleh Dispini & Mungkasi (2016, 2017), Mungkasi & Dheno (2017), serta Wazwaz (2009). Sebagai catatan, untuk mendapatkan penyelesaian hampiran yang lebih akurat, deret fungsi hampiran dari dekomposisi Adomian dapat dilanjutkan ke orde atau suku yang lebih tinggi, sesuai hasil yang disimpulkan oleh Wazwaz (2009). Dalam makalah ini hampiran Adomian hanya diberikan oleh tiga suku, yaitu persamaan (15). Dari hasil-hasil ini, metode dekomposisi Adomian mempunyai kekuatan, yaitu bahwa penyelesaian hampiran secara analitis dapat dinyatakan ke dalam suatu fungsi eksplisit, meskipun nilai awalnya berupa parameter yang belum diketahui pasti nilainya, yaitu nilai awal c sebarang.

Sebagai arah penelitian selanjutnya, hasil-hasil dalam makalah ini dapat dikembangkan lebih lanjut ke dalam aspek pendidikan matematika. Sejauh ini, metode dekomposisi Adomian belum populer diajarkan dalam perkuliahan jenjang sarjana, sehingga aspek pendidikan matematika ini masih terbuka. Aspek pendidikan matematika tersebut dapat mengadopsi hasil penelitian yang mutakhir, misalnya penelitian Solihah *et al.,* (2021). Aspek-aspek ini meliputi bagaimana aspek pedagogis pemodelan matematika yang diselesaikan dengan metode dekomposisi Adomian, dan lain-lain.

KESIMPULAN

Hasil-hasil penelitian yang telah tersaji memberikan beberapa hal yang perlu diperhatikan apabila metode dekomposisi Adomian dipilih untuk diterapkan dalam menyelesaikan masalah nilai awal. Pertama, metode dekomposisi Adomian mempunyai kekuatan, yaitu bahwa penyelesaian hampiran secara analitis dapat dinyatakan ke dalam suatu fungsi eksplisit, meskipun nilai awalnya berupa parameter yang belum diketahui pasti nilainya. Kedua, metode dekomposisi Adomian memberikan penyelesaian yang bersifat kontinu. Ketiga, metode dekomposisi Adomian memberikan penyelesaian hampiran yang akurat di sekitar titik nilai awal, tetapi kurang akurat di sekitar titik singular dan di titik-titik yang jauh dari titik nilai awal. Kekurangakuratan di sekitar titik singular dan di titik-titik yang jauh dari titik awal inilah merupakan kelemahan metode dekomposisi Adomian apabila metode ini diterapkan pada masalah nilai awal yang penyelesaian eksaknya memuat titik singular.

REKOMENDASI

Apabila interval variabel bebas cukup kecil, metode dekomposisi Adomian merupakan salah satu metode penyelesaian analitis untuk masalah nilai awal yang dapat diterapkan dan menghasilkan penyelesaian hampiran yang akurat.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kedua penulis berterima kasih kepada Universitas Sanata Dharma dan STKIP Weetebula atas dukungan yang diberikan dalam pelaksanaan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Dispini, M., & Mungkasi, S. (2016). Adomian decomposition method used to solve the shallow water equations. *AIP Conference Proceedings, 1746*, art. 20055.

Dispini, M., & Mungkasi, S. (2017). Adomian decomposition method used to solve the one-dimensional acoustic equations. *Journal of Physics*: *Conference Series, 856* (1), art. 12003.

Donachali, A. K., & Jafari, H. (2020). A decomposition method for solving quaternion differential equations. *International Journal of Applied and Computational Mathematics, 6* art. 107.

Gahgah, M., Sari, M. R., Kezzar, M., & Eid, M. R. (2020). Duan–Rach modified Adomian decomposition method (DRMA) for viscoelastic fluid flow between nonparallel plane walls. *The European Physical Journal Plus,* 135, art. 250.

Lede, Y. K. (2019). *Penerapan metode dekomposisi adomian, metode euler dan metode heun untuk menyelesaikan sistem persamaan penyakit demam berdarah.* Tesis, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Li, W., & Pang, Y. (2020). Application of Adomian decomposition method to nonlinear systems. *Advances in Difference Equations, 2020*, art. 67.

Lu, T.-T., & Zheng, W.-Q. (2021). Adomian decomposition method for first order PDEs with unprescribed data. *Alexandria Engineering Journal, 60* (2), 2563–2572.

Mungkasi, S., & Dheno, M. F. S. (2017). Adomian decomposition method used to solve the gravity wave equations. *AIP Conference Proceedings,* 1788, art. 30103.

Mungkasi, S., & Ekaputra, I. M. W. (2018). Adomian decomposition method for solving initial value problems in vibration models. *MATEC Web of Conferences,* 159, art. 2007.

Putranto, Y. W., & Mungkasi, S. (2017). Adomian decomposition method for solving the population dynamics model of two species. *Journal of Physics*: *Conference Series,* 795 *(1)*, art. 12045.

Saelao, J., & Yokchoo, N. (2020). The solution of Klein–Gordon equation by using modified Adomian decomposition method. *Mathematics and Computers in Simulation,* 171, 94–102.

Silva, M. I., & De Bortoli, A. L. (2021). Development of a model for the process of anaerobic digestion and its solution by the modified Adomian decomposition method. *International Journal of Applied and Computational Mathematics,* 7, art. 5.

Solihah, S., Amam, A., & Zakiah, N. E. (2021). Meningkatkan kemampuan komunikasi matematik serta self confidence siswa dengan menggunakan model brain-based learning. *Teorema*: *Teori dan Riset Matematika, 6*(1), 48–58.

Wazwaz, A. M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory,* Beijing: Higher Education Press & Berlin: Springer.

Yun, Y., Wen, Y., Chaolu, T. & Rach, R. (2019). A segmented Adomian algorithm for the boundary value problem of a second-order partial differential equation on a plane triangle area. *Advances in Difference Equations,* 2019, art. 438.