Teorema: *Teori dan Riset Matematika*, 7(1), 43-52, Maret 2022
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2022
https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/article/view/5669

METODE SECANT HALLEY NEWTON BEBAS TURUNAN KEDUA DENGAN ORDE KONVERGENSI ENAM DAN KONVERGENSI EMPAT

Djihad Wungguli[1], Ghivahri Sidik Mokoagow[2], Nurwan[3], Agusyarif Rezka Nuha[4]
[1,2,3,4] Universitas Negeri Gorontalo, Jl. Jendral Sudirman No.6, Kota Gorontalo, Indonesia
Email: djihad@ung.ac.id

ABSTRACT

This study aims to combine the second derivative-free Halley method with the Secant method and combine the Halley predictor-corrector modification method with the Secant method. A combination of new methods is introduced as the Secant-Halley method and the Secant-Halley-Newton method. Further, the Secant-Halley method has a total evaluation of functions four times per iteration, while the Secant-Halley-Newton method has a total evaluation of functions five times per iteration. Analytically, the order of convergence of the two methods is shown. The Secant-Halley method has a four-order convergence and the Secant-Halley-Newton method has a six-order convergence. The Secant-Halley method efficiency index is also obtained, which is 1,414 and the Secant-Halley-Newton method efficiency index is 1,431. Based on computational tests, these two proposed methods are able to match the compared methods. The Secant-Halley method is comparable to the combination of other Newton variance methods with the Secant method. The Secant-Halley-Newton method is superior in terms of speed of convergence, but often evaluates the functions..

Keywords: Halley method, newton method, order of convergence, secant method, efficiency index

ABSTRAK

Artikel ini membahas varian metode Secant Halley bebas turunan kedua yang merupakan hasil kombinasi metode Jisheng dengan metode Secant serta metode modifikasi prediktor – korektor Halley (New Halley-Newton) dengan metode Secant. Metode baru yang dihasilkan adalah metode Secant-Halley dengan orde konvergensi empat dan metode Secant-New Halley-Newton dengan orde konvergensi enam. Metode Secant-Halley memiliki total evaluasi fungsi sebanyak empat kali per iterasi, sedangkan metode Secant-New Halley-Newton memiliki total evaluasi fungsi sebanyak lima kali per iterasi dengan indeks efisiensi sebesar 1.414 untuk metode Secant-Halley dan sebesar 1.431 untuk metode *Secant*-New Halley-Newton. Selanjutnya dari hasil uji komputasi menunjukkan bahwa metode Secant-Halley setara dengan metode pembanding, dan metode Secant-New Halley Newton lebih baik dari metode pembanding. Adapun yang menjadi metode pembanding diantaranya metode Newton, metode Halley, metode modifikasi prediktor-korektor Halley, metode Secant Trapesium Newton, metode Secant MidPoint Newton, dan metode Secant Inverse Newton.

Kata kunci: Metode halley, metode secant, metode newton, orde konvergensi, indeks efisiensi

Dikirim: 22 Juli 2021; Diterima: 22 Januari 2022 ; Dipublikasikan: 30 Maret 2022
Cara sitasi: Wungguli, D., Mokoagow, G. S., Nurwan, N., & Nuha, A. R. (2022). Varian metode secant halley newton bebas turunan kedua dengan orde konvergensi enam dan konvergen empat. *Teorema: Teori dan Riset Matematika, 7*(1), 43-52.
DOI: http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v7i1.5669

PENDAHULUAN

Kesulitan yang sering dijumpai dalam masalah matematika atau matematika terapan adalah menemukan solusi persamaan non linear dari bentuk $f(x) = 0$. Secara analitik, persamaan ini terkadang sulit diselesaikan sehingga memerlukan suatu pendekatan atau metode secara komputasi numerik. Penyelesaian secara numerik dilakukan apabila persamaan nonlinear tidak dapat diselesaikan secara analitik (Utami *et al*., 2013). Menentukan solusi persamaan *nonlinear* dapat menggunakan berbagai metode diantaranya metode Newton, metode Halley dan metode Secant. Metode Newton merupakan salah satu metode terbuka untuk menentukan solusi akar dari persamaan nonlinear (Haqueqy *et al*., 2016).

Metode Newton mengalami beberapa modifikasi dan menghasilkan beberapa varian metode Newton, diantaranya metode Trapesium Newton (Weerakoon & Fernando, 2000), metode Midpoint Newton (Frontini & Sormani, 2003), metode Harmonik Newton dan metode Aritmatik Newton (Özban, 2004). Modifikasi lain dari metode Newton dapat dilihat pada (Zhou, 2007), (Singh, 2009), (Rahimi, *et al.*, 2011), (Kumar *et al*., 2013), dan (McDougall & Wotherspoon, 2014) .

Selain itu, penelitian yang berkaitan dengan kombinasi metode Varian Newton dengan metode Secant dilakukan oleh (Jain, 2013) dengan menggunakan formula yang dikembangkan (Wang, 2011) ditunjukkan pada Persamaan (1).

$$\underline{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)}{(1-\beta)f'(x_n) + \beta f'(x_n)/2\beta f'(x_n))} \tag{1}$$

Untuk $\beta = \frac{1}{2}$ memberikan bentuk metode Trapesium Newton, dan $\beta = 1$ memberikan bentuk metode Midpoint Newton. (Jain, 2013) melakukan kombinasi metode Varian Newton Persamaan (1) dengan metode Secant Persamaan (2).

$$x_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{\underline{x}_n - x_n}{f(\underline{x}_n) - f(x_n)} f(\underline{x}_n) \tag{2}$$

menghasilkan metode Secant-Trapesium-Newton dan Secant-Midpoint-Newton. Apabila Persamaan *(1)* didasari pada fungsi invers maka diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{1-\beta}{f'(x_n)} + \frac{\beta}{f'(x_n - f(x_n)/2\beta f'(x_n))}\right] \tag{3}$$

untuk $\beta = \frac{1}{2}$ memberikan bentuk metode Invers Newton. (Jain, 2013) melakukan kombinasi metode pada Persamaan (3) dengan $\beta = 1/2$, menghasilkan metode Secant-Invers-Newton dengan orde konvergensi empat.

Selain metode Newton, metode Halley juga merupakan metode iteratif yang cukup populer dikarenakan metode Halley memiliki orde konvergensi tiga. Akan tetapi dalam penerapannya, metode Halley mengandung turunan kedua. Sejumlah metode varian Halley bebas turunan kedua telah diusulkan oleh (Han *et al*., 2010). Selain itu, penelitian metode Halley bebas turunan juga dilakukan oleh (Jisheng *et al*., 2006) yaitu dengan mengaproksimasi turunan kedua pada metode Halley menggunakan pendekatan deret taylor dengan bantuan metode Newton dengan suatu parameter θ, dengan $\theta \in R, \theta \neq 0$ memberikan metode

$$y_n = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{f'(x_n)}\ x_{n+1} = x_n - \frac{\theta^2 f(x_n)}{(\theta^2 - \theta + 1)f'(x_n) - f(y_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\} \tag{4}$$

Untuk $\theta = 1$ diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n)/f'(x_n))}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5}$$

Persamaan (5) memiliki orde konvergensi tiga (Jisheng *et al*., 2006). Metode yang dikembangkan oleh Jisheng dkk tidak mengalami peningkatan orde konvergensi dari metode Halley.

Penelitian yang dilakukan oleh (Noor & Noor, 2007) mengembangkan metode Halley dan mengusulkan metode prediktor-korektor Halley dengan orde konvergensi enam seperti pada persamaan (6).

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ x_{n+1} = y_n - \frac{2f(y_n)f'(y_n)}{2f'(y_n)^2 - f(y_n)f''(y_n)}\} \tag{6}$$

Pada tahun yang sama (Noor *et al*., 2007) melakukan modifikasi pada metode prediktor-korektor Halley. Turunan kedua pada metode Halley diaproksimasi dengan pendekatan beda hingga menghasilkan Persamaan (7).

$$\left.\begin{array}{l} y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; x_{n+1} = y_n - \frac{2f(x_n)f(y_n)f'(y_n)}{2f(x_n)\left(f'(y_n)\right)^2 - \left(f'(x_n)\right)^2 f(y_n) + f'(x_n)f'(y_n)f(y_n)} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Modifikasi prediktor-korektor Halley mengalami penurunan orde konvergensi menjadi konvergen lima (Noor *et al*., 2007).

Berdasarkan beberapa hasil penelitian yang telah dijelaskan, diketahui bahwa metode Halley bebas turunan kedua yang telah diusulkan oleh (Jisheng *et al*., 2006) tidak mengalami peningkatan orde konvergensi, serta melihat bahwa modifikasi metode prediktor korektor Halley yang dilakukan oleh (Noor *et al*., 2007) mengalami penurunan orde konvergensi. Oleh karena itu, penulis melakukan penelitian dengan melakukan kombinasi metode yang sudah dikembangkan oleh Jisheng serta metode yang diusulkan oleh M. A. Noor masing-masing dikombinasikan dengan metode secant kemudian dilakukan analisis konvergensi untuk mengetahui orde konvergensi dari metode yang akan diusulkan, Adapun luaran dari penelitian ini yaitu kombinasi varian metode Secant halley Newton bebas turunan kedua dengan orde konvergensi enam dan konvergensi empat.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan pada penelitian ini yaitu metode studi literatur dengan tahapan:

1) Kombinasi Metode
   Tahapan pertama mendefinisikan metode yang diusulkan dengan cara melakukan kombinasi persamaan (5) dan persamaan (7), masing-masing dengan metode Secant.

2) Analisis Orde Konvergensi Metode:
   Setelah didefinisikan metode yang diusulkan, tahapan berikutnya adalah menentukan secara analitik orde konvergensi dan indeks efisiensi dari metode yang diusulkan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Adapun teorema dan definisi yang akan digunakan yaitu:

   1. Teorema deret Taylor
      Misalkan $n \in N$, misalkan $I := [a, b]$, dan misalkan $f: I \to R$ sedemikian rupa sehingga f dan turunannya $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ kontinu pada I dan bahwa $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b). Jika $x_0 \in I$, maka untuk setiap x di I terdapat suatu titik c diantara x dan x_0 sehingga

      $$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned} \quad (8)$$

      (Bartle & Sherbert, 2011)

   2. Definisi orde konvergensi
      Misalkan r adalah akar dan x_n adalah aproksimasi ke-n yang mendekati akar. Didefinisikan error sebagai $e_n = x_n - r$. Jika untuk n yang cukup besar diperoleh suatu hubungan perkiraan

      $$|e_{n+1}| = C|e_n|^p \quad (9)$$

      maka p disebut derajat (orde) kekonvergenan barisan tersebut dan C disebut konstanta galat asimptotik (Chasnov, 2012).

   3. Definisi orde konvergensi komputasi
      Misalkan α adalah akar persamaan nonlinear $f(x)$, dan andaikan $x_{n-1}, x_n, \; x_{n+1}$ adalah tiga nilai iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke α. Maka *Computational Order of Convergence* (COC) yang dinotasikan dengan P dapat diaproksimasi dengan menggunakan rumus:

$$P \approx \frac{ln\, ln\, |(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\,|}{ln\, ln\, |(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\,|} \qquad (10)$$

(Weerakoon & Fernando, 2000).

4. Definisi indeks efisiensi
   Misalkan q adalah banyaknya evaluasi fungsi yang dibutuhkan oleh suatu metode iterasi, maka efisiensi dari metode iterasi tersebut dihitung dengan indeks efisiensi yang didefinisikan sebagai $p^{1/q}$, dengan p adalah orde konvergensi metode (Gautschi, 2012).
5. Simulasi Numerik
   Tahapan terakhir adalah melakukan simulasi numerik dari metode yang diusulkan dan dibandingkan dengan beberapa metode yang sudah dikembangkan sebelumnya. Simulasi numerik menggunakan beberapa fungsi nonlinear dengan melihat segi jumlah iterasi, total fungsi yang di evaluasi atau *Number of Function Evaluation* (NFE), dan orde kekonvergenan komputasi atau *Computational Order of Convergence* (COC).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kombinasi Metode

Metode Secant memerlukan dua buah titik taksiran awal, misalkan titik $(x_n, f(x_n))$ dan titik $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, maka dapat diformulasikan metode Secant seperti pada Persamaan (11)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \qquad (11)$$

Misalkan titik x_{n+1} pada persamaan (5) sama dengan z_n, maka dengan menggunakan titik $(z_n, f(z_n))$ dan titik $(x_n, f(x_n))$ memberikan

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\; z_n \; = \; x_n - \left(\frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\; x_{n+1} \\ &= z_n - \left(\frac{z_n - x_n}{f(z_n) - f(x_n)}\right) f(z_n)\,\} \end{aligned} \qquad (12)$$

Persamaan (12) merupakan kombinasi dari metode Newton, metode varian Halley bebas turunan kedua, dan metode Secant. Metode Newton hanya digunakan untuk keperluan aproksimasi turunan kedua dari metode Halley, sehingga Persamaan (12) dikenalkan sebagai metode Secant-Halley (SH). Metode SH mengalami evaluasi fungsi sebanyak empat kali, yakni $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ dan $f(z_n)$.

Apabila titik x_{n+1} pada persamaan (7) dimisalkan sama dengan z_n, maka dengan menggunakan titik $(z_n, f(z_n))$ dan titik $(x_n, f(x_n))$ maka diperoleh hasil Persamaan (13).

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\; z_n \\ &= y_n - \frac{2f(x_n)f(y_n)f'(y_n)}{2f(x_n)\big(f'(y_n)\big)^2 - \big(f'(x_n)\big)^2 f(y_n) + f'(x_n)f'(y_n)f(y_n)}\; x_{n+1} \\ &= z_n - \left(\frac{z_n - x_n}{f(z_n) - f(x_n)}\right) f(z_n)\,\} \end{aligned} \qquad (13)$$

Kombinasi persamaan (13) dibentuk oleh metode modifikasi prediktor-korektor Halley yang mana merupakan kombinasi antara metode Halley dengan metode Newton, kemudian pada langkah ketiga merupakan metode Secant. Sehingga Persamaan (13) diperkenalkan sebagai metode Secant-New Halley-Newton (SHyN). Metode SHyN ini mengalami proses evaluasi fungsi sebanyak lima kali yaitu$f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$, $f'(y_n)$, dan $f(z_n)$.

Analisis Orde Konvergensi Metode

Berikut ini ditunjukan orde konvergensi metode iterasi dari metode Secant-Halley (SH) persamaan (12) yang disajikan pada Teorema 1 dan metode Secant- New Halley-Newton persamaan (13) yang disajikan pada Teorema 2.

Teorema 1

Misalkan fungsi f terdiferensialkan secukupnya dan kontinu untuk setiap x disekitar α dimana α adalah akar sederhana dan misalkan $f(\alpha) \neq 0$. Jika x_0 cukup dekat ke α maka metode Secant-Halley (13) mempunyai orde konvergensi empat dan memenuhi persamaan *error:*

$$e_{n+1} = c_2^3 e_n^4 + O(e_n^5) \tag{14}$$

dengan $C_2 = \frac{1}{2!}\frac{f^{('')}(\alpha)}{f'(\alpha)}$

Bukti 1. Misalkan e_n dan $\underline{e}_n$ masing-masing adalah error untuk x_n dan z_n, yaitu $x_n = \alpha + e_n$ dan $z_n = \alpha + \underline{e}_n$. Telah ditunjukkan oleh (Jisheng et al., 2006) dimana *error* dari Persamaan (5) adalah

$$\underline{e}_n = (c_2^2 + (\theta - 1)c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{15}$$

Dengan mengekspansi Taylor $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ dan misalkan $e_n = x_n - \alpha$

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n[1 + c_2 e_n + c_3 e_n^2 + O(e_n^3)] \tag{16}$$

Berikutnya mengekspansi Taylor $f(z_n)$ disekitar $z_n = \alpha$ dan dengan menggunakan persamaan (14) diperoleh:

$$f(z_n) = f(\alpha + \underline{e}_n) = f'(\alpha)\big(c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4)\big) + O(\underline{e}_n^{\,2}) = f'(\alpha)e_n[c_2^2 e_n^2] + O(e_n^5) \tag{17}$$

Dengan menggunakan Persamaan (16) dan Persamaan (17) diperoleh:

$$f(z_n) - f(x_n) = -f'(\alpha)e_n[1 + c_2 e_n + (c_3 - c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)] \tag{18}$$

Dengan menggunakan deret geometri memberikan hasil Persamaan (19)

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(z_n) - f(x_n)} &= \frac{-1}{f'(\alpha)e_n}[1 - \left(c_2 e_n + (c_3 - c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)\right) \\ &\quad + \left(c_2 e_n + (c_3 - c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 + O(e_n^3)] \\ &= -\frac{1}{f'(\alpha)e_n}[1 - c_2 e_n + (2c_2^2 - c_3)e_n^2 + O(e_n^3)] + O(e_n^3)]\end{aligned} \tag{19}$$

Diperoleh juga suatu hubungan

$$z_n - x_n = [c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4)] - e_n \tag{20}$$

Dengan menggunakan (19) dan (20) didapatkan:

$$\frac{z_n - x_n}{f(z_n) - f(x_n)} = \frac{1}{f'(\alpha)e_n}[e_n - c_2 e_n^2 + (c_2^2 + c_3)e_n^3 + O(e_n^4)] \tag{21}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (17) dan Persamaan (21) diperoleh Persamaan (22).

$$\begin{aligned}&\left(\frac{z_n - x_n}{f(z_n) - f(x_n)}\right)f(z_n) \\ &= \frac{1}{f'(\alpha)e_n}[e_n - c_2 e_n^2 + (c_2^2 + c_3)e_n^3 + O(e_n^4)] \\ &\cdot f'(\alpha)e_n[c_2^2 e_n^2 + O(e_n^5)] \\ &= c_2^2 e_n^3 - c_2^3 e_n^4 + O(e_n^5)\end{aligned} \tag{22}$$

Akhirnya diperoleh error dari persamaan (12)

$$e_{n+1} = \underline{e}_n - [c_2^2 e_n^3 - c_2^3 e_n^4 + O(e_n^5)] = c_2^3 e_n^4 + O(e_n^5) \tag{23}$$

Dengan menggunakan Definisi Orde konvergensi (9) dapat dikatakan bahwa metode Secant-Halley memiliki orde konvergensi empat.

Teorema 2

Misalkan fungsi f terdiferensialkan secukupnya dan kontinu untuk setiap x disekitar α dimana α adalah akar sederhana dan misalkan $f'(\alpha) \neq 0$. Jika x_0 cukup dekat ke α maka metode Secant-New Halley-Newton (14) mempunyai orde konvergensi enam dan memenuhi persamaan *error*:

$$e_{n+1} = (20c_3c_2^3 - 6c_2c_3^2 - 10c_2^2c_4 + 4c_2\,c_5 - 8c_2^3)e_n^6 + O(e_n^7) \tag{24}$$

dengan $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, untuk $j = 2,3,4,5$

Bukti 2. Misalkan e_n dan $\underline{e}_n$ masing-masing adalah error untuk x_n dan z_n, yaitu $x_n = \alpha + e_n$ dan $z_n = \alpha + \underline{e}_n$. Telah ditunjukkan oleh (M. A. Noor et al., 2007) error metode modifikasi prediktor-korektor Halley Persamaan (7) diberikan oleh:

$$\underline{e}_n = (20c_3c_2^2 - 6c_3^2 - 10c_2c_4 + 4c_5 - 8c_2^2)e_n^5 + O(e_n^6) \tag{25}$$

Misalkan

$$A = (20c_3c_2^2 - 6c_3^2 - 10c_2c_4 + 4c_5 - 8c_2^2) \tag{26}$$

Maka

$$\underline{e}_n = Ae_n^5 + O(e_n^6) \tag{27}$$

Dengan mengekspansi Taylor $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ dan dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - \alpha)^j$, untuk $j \geq 7$ diperoleh:

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n\big(1 + c_2e_n + c_3e_n^2 + c_4e_n^3 + c_5e_n^4 + c_6e_n^5 + O(e_n^6)\big) \tag{28}$$

Selanjutnya dilakukan ekspansi taylor untuk $f(z_n)$ disekitar $z_n = \alpha$ diperoleh:

$$\begin{aligned} f(z_n) \; = \; f'(\alpha)\underline{e}_n + O(e_n^2) \qquad &= f'(\alpha)\big(Ae_n^5 + O(e_n^6)\big) + O(e_n^2) \\ = f'(\alpha)Ae_n^5 + O(e_n^8) & \end{aligned} \tag{29}$$

Dengan menggunakan persamaan (28) dan (29) didapatkan:

$$\begin{aligned} f(z_n) - f(x_n) = -f'(\alpha)e_n[1 + c_2e_n + c_3e_n^2 + c_4e_n^3 + (c_5 - A)e_n^4 + c_6e_n^5 \\ + O(e_n^6)] \end{aligned} \tag{30}$$

Dengan menggunakan pendekatan deret geometri maka diperoleh

$$z_n - x_n \; = \; \big(\alpha + \underline{e}_n\big) - (\alpha - e_n) \; = \; \underline{e}_n - e_n \; = \; Ae_n^5 - e_n + O(e_n^6) \tag{31}$$

Dengan demikian error Persamaan (13) diberikan oleh:

$$e_{n+1} \; = \; \underline{e}_n - [Ae_n^5 - Ac_2e_n^6 + O(e_n^7)] \; = \; Ac_2e_n^6 + O(e_n^7) \tag{32}$$

Simulasi Numerik

Dengan menggunakan fungsi-fungsi nonlinear, dilakukan uji komputasi dengan beberapa metode yang menjadi pembanding diantaranya metode Newton (N), Metode Halley (H), Metode modifikasi predictor - korektor Halley (HN), metode yang diusulkan oleh Jain yaitu metode Secant Trapesium Newton (STN), Secant Midpoint Newton (SMN) dan metode Secant Inverse Newton (SIN). Toleransi yang digunakan yaitu 10^{-15}. Kriteria pemberhentian iterasi yang digunakan yaitu $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ atau $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$.

Tabel 1. Perbandingan metode dengan fungsi $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10,\ x_0 = 1{,}0$

Metode	N	NFE	COC	$\|f(x_{n+1})\|$	$\|x_{n+1} - x_n\|$
N	5	10	2,00	3,66251E-21	2,12698E-11
H	3	9	3,00	1,50220E-19	3,69865E-07
HN	2	8	5,16	4,60356E-18	4,18157E-04
STN	3	12	4,00	6,30351E-42	4,11852E-11
SMN	3	12	4,00	9,41906E-44	1,50763E-11
SIN	2	8	3,97	5,57021E-16	2,18358E-04
SH	3	12	4,00	4,23824E-43	2,16035E-11
ShyN	2	10	6,15	7,26509E-26	8,62242E-05

Tabel 2. Perbandingan metode dengan fungsi $f_2(x) = (x-1)^3 - 1,\ x_0 = 1{,}0$

Metode	N	NFE	COC	$\|f(x_{n+1})\|$	$\|x_{n+1} - x_n\|$
N	6	12	2,00	3,88452E-28	1,13791E-14
H	4	12	3,00	1,99815E-40	4,64016E-14
HN	3	12	5,00	3,25322E-75	1,16747E-15
STN	3	12	4,00	4,01405E-27	1,84026E-07
SMN	3	12	4,00	1,21103E-28	8,14622E-08
SIN	3	12	4,00	4,28613E-37	9,62219E-10
SH	3	12	4,00	4,22494E-28	1,08937E-07
SHyN	2	10	5,59	1,03626E-20	4,36232E-04

Tabel 3. Perbandingan metode dengan fungsi $f_3(x) = xe^{x^2} - (x) + 3\cos\cos x + 5, x_0 = 1.0$

Metode	N	NFE	COC	$\|f(x_{n+1})\|$	$\|x_{n+1} - x_n\|$
N	15	30	2,00	6,86972E-27	1,50068E-14
H	8	24	3,01	2,20323E-39	7,52976E-14

Metode	N	NFE	COC	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
HN	5	20	5,00	4,22350E-29	5,53454E-17
STN	8	32	4,00	3,04006E-35	7,43717E-10
SMN	7	28	4,00	4,85566E-16	5,48721E-05
SIN	7	28	4,00	1,09196E-27	7,73283E-08
SH	8	32	4,00	1,24258E-52	3,66553E-14
SHyN	4	20	6,01	2,01973E-27	1,46212E-05

Tabel 4. Perbandingan metode dengan fungsi $f_4(x) = ln\ ln\ (x) + \sqrt{x} - 5\ ,\ x_0 = 1,0$

Metode	n	NFE	COC	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
N	5	10	2,00	4,62611E-21	6,09324E-10
H	3	9	2,99	1,99998E-17	3,79277E-05
HN	3	12	5,00	1,14378E-65	1,36489E-12
STN	3	12	4,00	1,47715E-37	7,72919E-09
SMN	3	12	4,00	6,81860E-11	6,81860E-11
SIN	3	12	4,00	9,85508E-44	2,68441E-10
SH	3	12	4,00	2,33267E-42	5,68000E-10
SHyN	2	10	6,24	7,49326E-20	9,49618E-03

Tabel 5. Perbandingan metode dengan fungsi $f_5(x) = \sqrt{x} - (\frac{1}{x}) - 3\ , x_0 = 1,0$

Metode	n	NFE	COC	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
N	5	10	2,00	1,53056E-18	1,69953E-08
H	4	12	3,00	1,71655E-34	1,00382E-10
HN	3	12	5,00	1,60466E-49	3,20442E-09
STN	3	12	4,00	4,78519E-32	2,61893E-07
SMN	3	12	4,00	4,83271E-42	1,18271E-09
SIN	3	12	4,00	1,67454E-37	1,34383E-08
SH	3	12	4,00	2,09795E-37	1,42857E-08
SHyN	3	15	6,00	1,75947E-93	7,02465E-15

Tabel 6. Perbandingan metode dengan fungsi $f_6(x) = e^{-x^2+x+2} - cos\ cos\ x + x^3 + 1, x_0 = 1,0$

Metode	n	NFE	COC	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
N	8	16	2,00	1,28119E-19	1,96541E-09
H	5	15	3,00	1,84671E-20	1,87581E-07
HN	6	24	6,66	1,67228E-17	4,76936E-03
STN	12	48	4,04	6,73975E-36	5,21308E-09
SMN	10	40	4,00	8,33303E-20	6,52902E-05
SIN	4	16	4,07	2,84700E-33	2,36346E-08
SH	12	48	5,01	1,29666E-25	1,74377E-05
SHyN	3	15	6,85	2,84448E-41	1,70365E-06

Untuk Tabel 1 sampai Tabel 6, kolom pertama merupakan metode yang dibandingkan, kolom kedua merupakan iterasi yang diperoleh tiap metode untuk menemukan akar, kolom ketiga merupakan NFE (*Number of Function Evaluation*) atau banyaknya evaluasi fungsi yang dilakukan tiap metode, kolom keempat merupakan orde konvergensi atau *COC (Computational Order of Convergence)* secara numerik, kolom kelima merupakan nilai mutlak fungsi dari akar hampiran yang diperoleh, dan kolom keenam merupakan *error* atau selisih dari akar hampiran yang diperoleh dan akar hampiran sebelumnya.

Berdasarkan hasil simulasi pada Tabel 1 sampai Tabel 6, bahwa metode SHyN memperoleh iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan metode lainnya. Sementara untuk metode SH performanya setara dengan metode STN, SMN, dan SIN. Tabel 7 merupakan perbandingan indeks efisiensi masing-masing metode.

Tabel 7. Indeks efisiensi

Metode	COC(p)	NFE(q)	$p^{1/q}$
N	2	2	1,414
H	3	3	1,442
HN	5	4	1,495
STN	4	4	1,414
SMN	4	4	1,414
SIN	4	4	1,414
SH	4	4	1,414
SHyN	6	5	1,431

Dari Tabel 7 dapat dilihat bahwa metode SH memiliki indeks efisiensi sebesar 1,414 yang setara dengan metode STN, SMN, SIN, dan metode N. Sehingga dapat dikatakan metode SH memiliki tingkat efisiensi yang sebanding dengan kombinasi metode orde empat lainnya. Sedangkan metode SHyN memiliki indeks efisiensi sebesar 1,431 yang lebih baik dari metode orde empat STN, SMN, SIN dan N, namun tidak lebih baik dari metode H dan metode HN. Hal ini dikarenakan metode SHyN banyak melakukan evaluasi fungsi dari pada metode H dan metode HN, akan tetapi metode SHyN memiliki orde konvergensi 6 yang lebih baik dari orde konvergensi metode lainnya.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, jika ditinjau dari orde konvergensi, maka metode SHyN lebih cepat konvergen ke akar daripada metode lainnya. Untuk metode SH, kecepatan konvergensinya setara dengan metode STN, SMN, SIN. Jika ditinjau dari indeks efisiensi, dapat dilihat bahwa metode SH setara dengan metode STN, SMN, SIN, dan metode Newton. Artinya metode SH sebanding dengan metode orde empat lainnya dan metode Newton. Sedangkan indeks efisiensi untuk metode SHyN lebih baik dari metode orde empat STN, SMN, SIN dan N, namun tidak lebih baik dari metode H dan metode HN. Secara umum metode SH sebanding dengan metode orde empat lainnya dan untuk metode SHyN unggul dari aspek orde konvergensinya namun memiliki kelemahan dari segi evaluasi fungsi.

REKOMENDASI

Rekomendasi pada penelitian ini yaitu pada metode Secant Halley Newton (SHyN) dilakukan reduksi fungsi agar indeks efisiensi metode SHyN bisa meningkat.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh peneliti yang artikel-artikelnya menjadi rujukan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analaysis fourth edition*. John Wiley & Sons, Inc.

Chasnov, J. R. (2012). *Introduction to numerical methods*. The Hong Kong University of Science and Technology.

Frontini, M., & Sormani, E. (2003). Some variant of newton's method with third-order convergence. *Applied Mathematics and Computation*, *140*(2–3), 419–426. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00238-2

Gautschi, W. (2012). *Numerical analysis, second edition*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

Han, J., He, H., & Xu, A. (2010). *A second-derivative -free variant of halley's method with sixth-order convergence*. *Plants, 3*(2), 195–203.

Haqueqy, N., Silalahi, B. P., & Sitanggang, I. S. (2016). Uji komputasi algoritme varian metode newton pada permasalahan optimasi nonlinear tanpa kendala. *Journal of Mathematics and Its Applications*, *15*(2), 63. https://doi.org/10.29244/jmap.15.2.63-76.

Jain, D. (2013). Families of newton-like methods with fourth-order convergence. *International Journal of Computer Mathematics*, *90*(5), 1072–1082.

Jisheng, K., Yitian, L., & Xiuhua, W. (2006). Modified halley's method free from second derivative. *Applied Mathematics and Computation*, *183*(1), 704–708. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.097.

Kumar, M., Singh, A. K., & Srivastava, A. (2013). Various newton-type iterative methods for solving nonlinear equations. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, *21*(3), 334–339. https://doi.org/10.1016/j.joems.2013.03.001.

McDougall, T. J., & Wotherspoon, S. J. (2014). A simple modification of newton's method to achieve convergence of order 1 + √2. *Applied Mathematics Letters*, *29*, 20–25. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.10.008.

Noor, K. I., & Noor, M. A. (2007). Predictor-corrector halley method for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, *188*(2), 1587–1591. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.023.

Noor, M. A., Khan, W. A., & Hussain, A. (2007). A new modified halley method without second derivatives for nonlinear equation. *Applied Mathematics and Computation*, *189*(2), 1268–1273.

Özban, A. . (2004). Some new variants of newton's method. *Applied Mathematics Letters*, *17*(6), 677–682. https://doi.org/10.1016/j.

Rahimi, B., Ghanbari, B., & Porshokouhi, M. G. (2011). Some third-order modifications of newton ' s method. *Gen. Math. Notes*, *3*(1), 116–123.

Singh, M. K. (2009). A six-order variant of newton's method for solving nonlinear equations. *Computational Methods in Science and Technology*, *15*(2), 185–193. https://doi.org/10.12921/cmst.2009.15.02.185-193.

Utami, N. N. R., Widana, I. N., & Asih, N. M. (2013). Perbandingan solusi sistem persamaan nonlinear menggunakan metode newton-raphson dan metode jacobian. *E-Jurnal Matematika*, *2*(2), 11. https://doi.org/10.24843/mtk.2013.v02.i02.p032.

Wang, P. (2011). A third-order family of newton-like iteration methods for solving nonlinear equations. *Journal of Numerical Mathematics and Stochastics*, *3*(1), 13–19.

Weerakoon, S., & Fernando, T. G. I. (2000). A weighted variant family of newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied Mathematics and Computation*, *13*(2), 87–93. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.08.041.

Zhou, X. (2007). A class of newton's methods with third-order convergence. *Applied Mathematics*

Letters, *20*(9), 1026–1030. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.09.010.