Teorema: *Teori dan Riset Matematika*, 7(1), 205–212, Maret 2022
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2022
https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/article/view/6709

RUANG PROYEKTIF KOMPLEKS 〖CP〗^n SEBAGAI RUANG FAKTOR $\mathbb{S}^{2n+1}/_{\mathbb{S}^1}$

Denik Agustito[1], Irham Taufiq[2], Muhammad Irfan[3]
[1,2,3] Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Jl. Batikan UH 3/1043 Tuntungan Umbulharjo, Indonesia
Email: [3]muhammad.irfan@ustjogja.ac.id

ABSTRACT

The action of a group *G* on a non-empty set *X* is a mapping $G \times X \longrightarrow X$ defined by $(g, x) \longmapsto gx$ and satisfying the properties $ex = x$ and $g(hx) = (gh)x$ for all $x \in X$ and $g, h \in G$ where *e* is the identity element in group *G* and this is equivalent to the existence of a group homomorphism $\rho: G \longrightarrow \mathrm{Bij}(X)$ defined by $\rho(g) = \rho_g \in \mathrm{Bij}(X)$. Then the action of a group *G* in a topological space X_{Top} obtains a homeomorphic topological space with a space consisting of all orbits in the X_{Top} topological space, namely $G/X_{\mathrm{Top}} = \{[x] | x \in X_{\mathrm{Top}}\}$. If group *G* is a unit circle group i.e. S^1 acting on a topological space S^{2n+1} then the factor space will be homoemorphic on an n-dimensional complex projective space i.e. CP^n.

Keywords: Action, group, homeomorphic, complex, projective, topology

ABSTRAK

Aksi dari sebuah grup G pada sebuah himpunan tak-kosong X adalah sebuah pemetaan $G \times X \longrightarrow X$ yang didefinisikan dengan $(g, x) \longmapsto gx$ dan memenuhi sifat $ex = x$ dan $g(hx) = (gh)x$ untuk semua $x \in X$ dan $g, h \in G$ dimana e adalah elemen identitas pada grup G dan ini ekuivalen dengan adanya suatu homomorfisma grup $\rho: G \longrightarrow \mathrm{Bij}(X)$ yang didefinisikan dengan $\rho(g) = \rho_g \in \mathrm{Bij}(X)$. Kemudian aksi suatu grup G pada suatu ruang topologi X_{Top} memperoleh sebuah ruang topologi yang homeomorfik dengan ruang yang terdiri dari semua orbit-orbit pada ruang topologi X_{Top} yaitu $G/X_{\mathrm{Top}} = \{[x] | x \in X_{\mathrm{Top}}\}$. Jika grup G adalah grup lingkaran satuan yaitu $\mathbb{S}^1$ yang beraksi pada suatu ruang topologi $\mathbb{S}^{2n+1}$ maka ruang faktornya akan homoemorfik pada ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}P^n$.

Kata Kunci: Aksi, grup, homeomorfik, kompleks, proyektif, topologi.

Dikirim: 07 Desember 2021; Diterima: 22 Januari 2022; Dipublikasikan: 30 Maret 2022
Cara sitasi: Agustito, D., Taufiq, I., & Irfan, M. (2022). Ruang proyektif kompleks 〖CP〗^n sebagai ruang faktor $\mathbb{S}^{2n+1}/_{\mathbb{S}^1}$. *Teorema: Teori dan Riset Matematika, 7*(1), 205-212. DOI: http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v7i1.6709

PENDAHULUAN

Ruang faktor dalam kajian topologi umum memainkan peranan penting dalam cabang matematika seperti geometri diferensial, topologi aljabarik atau topologi geometrik. Kontruksi dari ruang faktor bisa ditemukan dalam (Munkres, 2000) dan salah satu contoh kegunaan ruang faktor adalah untuk mengkonstruksi sebuah torus dan torus ini sangat penting dalam kajian geometri diferensial, topologi aljabarik atau topologi geometrik karena memiliki struktur diferensial sebagai manifold. Ruang faktor dari ruang topologi X juga bisa dikonstruksi melalui aksi dari sebuah grup pada ruang topologi tersebut. Jika diberikan sebuah grup G dan sebuah ruang topologi X maka sebuah aksi dari grup G pada himpunan X adalah pemetaan $G \times X \longrightarrow X$ yang didefinisikan dengan $(g, x) \longmapsto gx$ dan memnuhi sifat $ex = x$ dan $g(hx) = (gh)x$ untuk semua $x \in X$ dan $g, h \in G$ dimana e adalah elemen identitas pada grup G. Gagasan mengenai aksi dari grup G pada ruang topologi X akan ekuivalen dengan adanya suatu homomorfisma grup $\rho: G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ yang didefinisikan dengan $\rho(g) = \rho_g \in \mathrm{Homeo}(X)$ dimana $\mathrm{Homeo}(X)$ adalah grup dari semua homeomorfisma dari ruang topologi X kedirinya sendiri bersama dengan operasi komposisi fungsi dan $\rho_g(x) = gx$ untuk semua $x \in X$. Untuk gagasan mengenai relasi ekuivalen, kelas-kelas ekuivelan dan ruang faktornya juga sudah familiar dan kemudian pada ruang topologi X didefinisikan sebuah relasi $\sim$ yaitu sebagai berikut:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\equiv} \exists g \in G \ni \rho_g(x) = y \tag{1}$$

untuk x dan y di X. Jelas relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalen dan kelas ekuivalensi yang memuat x adalah $[x] = \{y \in X | x \sim y\} = \{y \in X | \rho_g(x) = y \text{ untuk suatu } g \in G\} = \{gx | g \in G\}$ (katakan $[x]$ sebagai orbit dari *x*). Himpunan yang terdiri dari semua orbit-orbit pada ruang topologi X akan dinotasikan dengan $X/G = \{[x] | x \in X\}$ bersama dengan topologi faktor padanya dan katakan X/G sebagai ruang faktor.

Pada penelitian sebelumnya, (Massey, 1973) telah mengkonstruksi ruang faktor dari bidang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^2$ dengan mengidentifikasi dua titik (dengan kata lain koordinat homogennya adalah konjugat satu sama lain) dan menghasilkan ruang topologi yang sangat bagus yaitu sphere berdimensi-4 yang dinotasikan dengan $\mathbb{S}^4$. Pada tulisan ini, penulis akan menyajikan bahwa ruang faktor dari sphere berdimensi $2n + 1$ yaitu sebagai berikut:

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \left\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\right\} \tag{2}$$

Yang aksi pada sebuah grup (Hundly, 2009) yaitu $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ menghasilkan ruang topologi yang sangat bagus yaitu ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yang dinotasikan dengan $\mathbb{C}P^n$. Konstruksi dari sifat-sifat topologis dari $\mathbb{C}P^n$ bisa ditemukan dalam (Agustito *et al*., 2021). Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah ruang faktor $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ dikontruksi melalui sebuah homeomorfisma di antara $\mathbb{C}P^n$ dan $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ dan ini bisa ditemukan dalam (Bauer *et al*., 2015). Homeomorfisma di antara $\mathbb{C}P^n$ dan $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ dalam tulisan ini bukanlah hal baru tetapi penulis akan memberikan beberapa hal baru ketika membuktikan homeomorfisma di antara $\mathbb{C}P^n$ dan $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ yaitu pada Lemma 1.8 dan Lemma 1.10. Seluruh pembuktikan dalam tulisan ini akan disajikan secara detail mengingat sepanjang sepengetahuan penulis mengenai homeomorfisma di antara $\mathbb{C}P^n$ dan $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ dalam berbagai literatur kurang ditulis secara detail.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literatur mengenai konstruksi ruang factor. Penelitian dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan sebuah aksi dari grup lingkaran satuan $\mathbb{S}^1$ pada sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$.
2. Mengkonstruksi sebuah pemetaan kontinu $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$.

3. Dengan gagasan mengenai konstruksi ruang faktor, diperoleh sebuah pemetaan kontinu $f: \mathbb{C}\mathrm{P}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ dan dibuktikan bahwa pemetaan f adalah homeomoerfisma.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Gagasan mengenai pemetaan kontinu, pemetaan terbuka dan homeomorfisma dapat dijumpai pada (Dugundji, 1966). Diberikan sebuah grup G dan sebuah ruang topologi X dan himpun semua homeomorfisma pada X dan notasikan himpunan tersebut dengan $\mathrm{Homeo}(X)$. Himpunan $\mathrm{Homeo}(X)$ membentuk semua grup terhadap operasi komposisi fungsi, dan dari himpunan $\mathrm{Homeo}(X)$ akan didefinisikan sebuah aksi dari grup G pada ruang topologi X sebagai suatu homomorfisma grup.

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

Jika $G = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,||z| = 1\}$ adalah sebuah grup terhadap operasi perkalian dan diberikan sebuah ruang topologi yaitu sphere berdimensi $2n+1$ yaitu sebagai berikut:

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \left\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \middle| \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\right\}$$

maka dapat dibentuk sebuah pengaitan dari $\mathbb{S}^1$ pada sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$ yaitu $\rho: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^{2n+1})$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho_z: \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$$

dengan $\rho_z\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big) = (z.z_1, \dots, z.z_{n+1})$ untuk setiap $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}$ dan pengaitan tersebut adalah *well-defined*.

Sifat 1.1. Pemetaan $\rho: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^{2n+1})$ adalah homomorfisma grup.
Bukti:
Ambil sembarang $y, z \in \mathbb{S}^1$.
Jelas $\rho_{yz}: \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^{2n+1})$.
Ambil sembarang $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}$.
Jelas $\rho_{yz}\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big) = \big((yz)z_1, \dots, (yz)z_{n+1}\big) = \big(y(zz_1), \dots, y(zz_{n+1})\big)$

$$= \rho_y\big((zz_1, \dots, zz_{n+1})\big) = \rho_y\Big(\rho_z\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big)\Big)$$
$$= \big(\rho_y \rho_z\big)\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big).$$

Jelas $\rho_{yz} = \rho_y \rho_z$ atau dengan kata lain $\rho(yz) = \rho_y \rho_z$ untuk setiap $y, z \in \mathbb{S}^1$.
Jadi pemetaan $\rho: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^{2n+1})$ adalah homomorfisma grup.

Kemudian didefinisikan sebuah relasi ~ pada X yaitu sebagai berikut:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{=} \exists g \in G \ni \rho_g(x) = y$$

untuk suatu $\rho_g \in \mathrm{Homeo}(X)$.

Teorema 1.2. Relasi ~ pada X adalah relasi ekuivalen.
Bukti:
(i). Ambil sembarang $x \in X$.
Pilih $e \in G$ sebagai elemen identitasnya.
Definisikan $\rho_g = 1_X \in \mathrm{Homeo}(X)$.
Jelas $\rho_g(x) = 1_X(x) = x$.
Jadi relasi ~ bersifat refleksif.
(ii). Ambil sembarang $x, y \in X$ yang sifatnya $x \sim y$.
Karena $x \sim y$, jelas $\exists g \in G \ni \rho_g(x) = y$ untuk suatu $\rho_g \in \mathrm{Homeo}(X)$.

Karena $\rho_g \in \mathrm{Homeo}(X)$, jelas $\rho_g^{-1} \in \mathrm{Homeo}(X)$.
Karena $\rho_g(x) = y$, jelas $y = \rho_g^{-1}(x)$.
Jelas $y \sim x$.
Jadi relasi $\sim$ bersifat simetrik.

(iii). Ambil sembarang $x, y, z \in X$ yang sifatnya $x \sim y$ dan $y \sim z$.
Jelas $\exists g_1, g_2 \in G \ni \rho_{g_1}(x) = y$ dan $\rho_{g_2}(y) = z$ untuk suatu $\rho_{g_1}, \rho_{g_2} \in \mathrm{Homeo}(X)$.
Karena $\rho_{g_1}, \rho_{g_2} \in \mathrm{Homeo}(X)$, jelas $\rho_{g_2}\rho_{g_1} \in \mathrm{Homeo}(X)$.
Jelas $\rho_{g_2}\rho_{g_1}(x) = z$.
Jelas $x \sim z$.
Jadi relasi $\sim$ bersifat transitif.

Kelas ekuivalensi yang memuat $x \in X$ adalah $[x] = \{y \in X | y \sim x\}$ dan himpunan faktornya akan dinotasikan dengan $X/G = \{[x] | x \in G\}$. Dari contoh sebelumnya diperoleh sebuah himpunan faktor yaitu sebagai berikut:

$$\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 = \{[(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1} | (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}\}$$

Lemma 1.3. Jika diberikan sebuah pemetaan kontinu $f: X \longrightarrow X$ dan Y subruang dari X yang sifatnya $f(X) \subseteq Y$ maka pemetaan $g: X \longrightarrow Y$ yang didefinisikan dengan $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in X$ adalah kontinu.
Bukti:
Ambil sembarang $x \in X$ dan sembarang lingkungan buka U dalam Y dari $g(x)$.
Karena U buka dalam Y, jelas $U = V \cap Y$ untuk suatu himpunan buka V dalam X.
Karena $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in X$, jelas $f(x) = g(x) \in U = V \cap Y$.
Jelas $x \in f^{-1}(U) = f^{-1}(V \cap Y) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(V)$.
Karena f kontinu dan V buka dalam X, jelas $f^{-1}(V)$ juga buka dalam X.
Jelas $x \in f^{-1}(V)$.
Pilih $U_x = f^{-1}(V)$ adalah lingkungan buka dari x.
Jelas
$$\begin{aligned} g(U_x) = g\big(f^{-1}(V)\big) &= \{g(a) | a \in f^{-1}(V)\} \\ &= \{g(a) | f(a) \in V\} \\ &= \{g(a) | g(a) \in V\} \\ &= V \end{aligned}$$
Jadi $g: X \longrightarrow Y$ adalah pemetaan kontinu.

Teorema 1.4. Pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$r\big((z_1, \dots, z_n)\big) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$$

adalah kontinu dengan $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$.
Bukti:
Jelas pemetaan identitas $1_{\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}}: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ adalah kontinu dan $\mathbb{S}^{2n+1}$ adalah subruang dari $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Karena $\frac{1}{|z|} \in \mathbb{C}$ adalah skalar, jelas pemetaan $f: \frac{1}{|z|} 1_{\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}}: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ yang didefinisikan dengan $f\big((z_1, \dots, z_n)\big) = \frac{1}{|z|} 1_{\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}}\big((z_1, \dots, z_n)\big) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$ juga kontinu.
Jelas $f(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \subseteq \mathbb{S}^{2n+1}$.
Bentuk pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ yang didefinisikan dengan $r\big((z_1, \dots, z_n)\big) = f\big((z_1, \dots, z_n)\big) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$.
Berdasarkan Lemma 1.3, jelas pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ kontinu.

Jadi pemetaan $r\colon \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ adalah kontinu.

Kemudian akan diperkenalkan sebuah ruang topologi yang berisikan semua garis-garis yang melalui titik pusat koordinat dari ruang Euclidean kompleks $\mathbb{C}^{n+1}$ yaitu ruang proyektif kompleks dan dinotasikan dengan $\mathbb{C}P^n$. Ruang Proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ ini telah diketahui memiliki struktur manifold yaitu manifold kompleks.

Teorema 1.5. Pengaitan $f\colon \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f([z_1\colon \ldots \colon z_{n+1}]) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$$

adalah bijektif.

Bukti:

(i). Dibuktikan pengaitan $f\colon \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah *well-defined*.
Ambil sembarang $[y_1\colon \ldots \colon y_{n+1}], [z_1\colon \ldots \colon z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$ yang sifatnya $[y_1\colon \ldots \colon y_{n+1}] = [z_1\colon \ldots \colon z_{n+1}]$.
Jelas $(y_1, \ldots, y_{n+1}) = k(x_1, \ldots, x_{n+1})$ untuk suatu $k \in \mathbb{C}$ dengan $k \neq 0$.
Jelas $y_i = kx_i$ untuk suatu $k \in \mathbb{C}$ dengan $k \neq 0$ dengan $i = 1, \ldots, n+1$.
Tulis $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ dan $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$.
Jelas $\left(\frac{y_1}{|y|}, \ldots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right) = \left(\frac{kz_1}{|k||z|}, \ldots, \frac{kz_{n+1}}{|k||z|}\right) = \frac{k}{|k|}\left(\frac{z_1}{|z|}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$.
Tulis $\lambda = \frac{k}{|k|} \in \mathbb{S}^1$.
Jelas $\left(\frac{y_1}{|y|}, \ldots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right) = \lambda\left(\frac{z_1}{|z|}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$.
Jelas $\left[\left(\frac{y_1}{|y|}, \ldots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1} = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$.
Jelas $f([y_1\colon \ldots \colon y_{n+1}]) = f([z_1\colon \ldots \colon z_{n+1}])$.
Jadi pengaitan $f\colon \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah *well-defined*.

(ii). Ambil sembarang $[y_1\colon \ldots \colon y_{n+1}], [z_1\colon \ldots \colon z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$ yang sifatnya $f([y_1\colon \ldots \colon y_{n+1}]) = f([z_1\colon \ldots \colon z_{n+1}])$.
Jelas $\left[\left(\frac{y_1}{|y|}, \ldots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1} = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$.
Jelas $\left(\frac{y_1}{|y|}, \ldots, \frac{y_{n+1}}{|y|}\right) = \lambda\left(\frac{z_1}{|z|}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{S}^1$.
Jelas $\frac{1}{|y|}(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \frac{\lambda}{|z|}(z_1, \ldots, z_{n+1})$.
Jelas $(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \frac{\lambda|y|}{|z|}(z_1, \ldots, z_{n+1})$.
Jelas $[y_1\colon \ldots \colon y_{n+1}] = [z_1\colon \ldots \colon z_{n+1}]$.
Jadi pemetaan $f\colon \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah injektif.

(iii). Ambil sembarang $[a]_{\mathbb{S}^1} \in \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.
Tulis $[a]_{\mathbb{S}^1} = [(z_1, \ldots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}$.
Pilih $a = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Karena $a = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}$, Jelas $r(a) = r\big((z_1, \ldots, z_{n+1})\big) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right) = (z_1, \ldots, z_{n+1})$.
Pilih $b = [z_1, \ldots, z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.
Jelas $f(b) = f([z_1, \ldots, z_{n+1}]) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1} = [(z_1, \ldots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1 = [a]_{\mathbb{S}^1}}$.
Jadi pemetaan $f\colon \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah adalah surjektif.
Sekarang pandang diagram berikut ini:

r

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^{2n+1} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{C}P^n \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Sembarang $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ berlaku $r\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$ dan $\pi\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big) = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$. Jelas $q\left(r\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big)\right) = q\left(\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$ dan $f\left(\pi\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big)\right) = f([z_1 : \dots : z_{n+1}]) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$. Jelas $q \circ r = f \circ \pi$; dengan kata lain Diagram tersebut adalah komutatif. Jelas bahwa pemetaan proyeksi π, q adalah surjektif kontinu dan terbuka dan pemetaan r juga kontinu.

Teorema 1.6. Pemetaan $f : \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah kontinu.
Bukti:
Ambil sembarang himpunan buka *U* dalam $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.
Karena q kontinu, jelas $q^{-1}(U)$ adalah buka dalam $\mathbb{S}^{2n+1}$.
Karena r kontinu, jelas $r^{-1}\big(q^{-1}(U)\big)$ adalah buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Jelas $r^{-1}\big(q^{-1}(U)\big) = (q \circ r)^{-1}(U)$ buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Karena Diagram 1 di atas adalah komutatif, jelas $q \circ r = f \circ \pi$.
Karena $q \circ r = f \circ \pi$ dan $(q \circ r)^{-1}(U)$, jelas $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Jelas $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)$ buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Karena π adalah pemetaan terbuka, jelas $\pi\left(\pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)\right) = f^{-1}(U)$ buka dalam $\mathbb{C}P^n$.
Jadi diperoleh jika *U* adalah sembarang himpunan buka dalam $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ maka $f^{-1}(U)$ adalah juga himpunan buka dalam $\mathbb{C}P^n$.
Jadi pemetaan $f : \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah kontinu.

Teorema 1.7. Pemetaan $f^{-1} : \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f^{-1}([(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}) = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$$

adalah invers dari pemetaan $f : \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.
Bukti:

(i). Ambil sembarang $[z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.

Jelas
$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)([z_1 : \dots : z_{n+1}]) &= f^{-1}\big(f([z_1 : \dots : z_{n+1}])\big) \\ &= f^{-1}\left(\left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}\right) \\ &= [z_1 : \dots : z_{n+1}]\end{aligned}$$

Jadi $f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{C}P^n}$.

(ii). Ambil sembarang $[(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}$.

Jelas
$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})([(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}) &= f\big(f^{-1}([(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1})\big) \\ &= f([z_1 : \dots : z_{n+1}]) \\ &= [(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1}\end{aligned}$$

Jadi $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1}$.

Dari (i) dan (ii), jelas pemetaan $f^{-1}: \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah invers dari pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.

Lemma 1.8. Jika diberikan fungsi f adalah kontinu dan terbuka, fungsi h adalah kontinu, maka setiap fungsi g yang memenuhi sifat $h = gf$ adalah kontinu.
Bukti:
Untuk setiap fungsi g, tulis $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ dan $h: X \longrightarrow Z$ yang sifatnya $h = gf$ dengan f adalah kontinu dan terbuka dan g kontinu.
Ambil sembarang himpunan buka *U* dalam Z.
Karena g kontinu, jelas $h^{-1}(U)$ buka dalam *X*.
Karena f adalah terbuka, jelas $f\big(h^{-1}(U)\big)$ buka dalam Y.
Karena $h = gf$, jelas $g\Big(f\big(h^{-1}(U)\big)\Big) = (gf)\big(h^{-1}(U)\big) = h\big(h^{-1}(U)\big) \subseteq U$.
Jadi fungsi g adalah kontinu.

Lemma 1.9. Komposisi dari dua buah fungsi kontinu dan terbuka adalah kontinu dan terbuka.
Bukti: Silakan lihat pada (Dugundji, 1966).

Lemma 1.10. Pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ adalah pemetaan terbuka.
Bukti:
Ambil sembarang himpunan buka *U* dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Jelas $r(U) = \left\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \middle| \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right) \in \mathbb{S}^{2n+1}\right\}$.
Jelas $r(U) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \cap \mathbb{S}^{2n+1}$ sedangkan $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ buka dalam dirinya, akibatnya $r(U)$ buka dalam $\mathbb{S}^{2n+1}$.
Jadi pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ adalah pemetaan terbuka.

Sekarang pandang diagram berikut ini:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^{2n+1} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{C}P^n & \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \arrow[l, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Sembarang $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ berlaku $r\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big) = \left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)$ dan $\pi\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big) = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$. Jelas $q\Big(r\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big)\Big) = q\left(\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$ dan $f^{-1}\Big(q\Big(r\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big)\Big)\Big) = f^{-1}\left(\left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}\right) = \left[\frac{z_1}{|z|} : \dots : \frac{z_{n+1}}{|z|}\right] = [z_1 : \dots : z_{n+1}] = \pi\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big)$. Jelas $= f^{-1} \circ q \circ r$; dengan kata lain Diagram tersebut adalah komutatif.

Teorema 1.11. Pemetaan $f^{-1}: \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah kontinu.

Bukti:
Berdasarkan Lemma 1.10, jelas pemetaan r adalah terbuka.
Karena pemetaan q dan r adalah terbuka, berdasarkan Lemma 1.9, jelas $q \circ r$ adalah terbuka.
Karena pemetaan π adalah kontinu dan $q \circ r$ adalah terbuka serta memenuhi sifat $\pi = f^{-1} \circ q \circ r$ dari Diagram 2, berdasarkan Lemma 1.8, jelas pemetaan f^{-1} adalah kontinu.
Jadi pemetaan $f^{-1}: \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah kontinu.

Berdasarkan Teorema 1.5, Teorema 1.6, Teorema 1.7 dan Teorema 1.8 diperoleh bahwa pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah kontinu, bijektif dan inversnya kontinu; dengan kata lain bahwa pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah homeomorfisma.

KESIMPULAN

Simpulan dari tulisan ini adalah bahwa jika diberikan sebuah grup lingkaran satuan $G = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ dan sebuah sphere berdimensi-$2n+1$ yaitu $\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \,\big|\, \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\}$ maka ruang faktornya yaitu $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 = \{[(z_1, \dots, z_{n+1})]_{\mathbb{S}^1} \,|\, (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}\}$ akan homeomorfik ke ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}P^n$ melalui homoemorfisma $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f([z_1: \dots : z_{n+1}]) = \left[\left(\frac{z_1}{|z|}, \dots, \frac{z_{n+1}}{|z|}\right)\right]_{\mathbb{S}^1}$$

Dan untuk membuktikan bahwa pemetaan $f: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ adalah homeomorfisma, menggunakan hasil yang penulis peroleh yaitu jika diberikan fungsi f adalah kontinu dan terbuka, fungsi h adalah kontinu, maka setiap fungsi g yang memenuhi sifat $h = gf$ adalah kontinu (Lemma 1.8) dan pemetaan $r: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ adalah pemetaan terbuka (Lemma 1.10).

REKOMENDASI

Tulisan ini direkomendasikan untuk bagi peneliti yang bekerja di teori homotopi ekuivariant yang meneliti tentang aksi dari sebuah ruang topologi terhadap suatu grup topologis, kemudian bagi peneliti yang bekerja di geometri aljabarik kompleks untuk mengembangkan gagasan teori *hodge* dari ruang proyektif kompleks serta dalam kajian geometri differensial yang mengkaji tentang struktur diferensial pada ruang proyektif kompleks.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ucapkan terima kasih kepada Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa dan semua pihak yang telah mendukung penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Agustito, D., Taufiq. I., Setyana. D. S., & Purwoko R, Y. (2021). *ruang proyektif kompleks* $\mathbb{C}P^n$ *adalah manifold kompleks*. Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, *9*(1), 99-112.

Bauer, T., Boij, M., Rocco, S. D., Rydh, D., & Skjelnes, R. (2015). Algebra and geometry through projective spaces. SF2724 Topics in Mathematics IV.

Dugundji, J. (1966). *Topology*. Michigan Allyn and Bacon.

Grillet, P, A. (2007). *Algebra*, Springer Science + Business Media, LLC, Newy-York.

Hundly, J. (2009). *Introduction to Lie Groups*, Southern Illinois University Carbondale.

Rotman, J. (2005). *A First Course in Abstract Algebra with Applications*, Prenstice Hall.