

SOLUSI NUMERIK MASALAH BIO-DEGRADASI PENCEMAR AIR TANAH MENGUNAKAN *METHOD-OF-LINES*

Mochamad Tito Julianto¹, Sri Nurdiati², Muhammad Adam Tripranoto³, Mohamad Khoirun Najib⁴

^{1,2,3,4} IPB University, Jl. Raya Dramaga, Babakan, Bogor, Indonesia

Email: ¹mtjulianto@apps.ipb.ac.id, ²nurdiati@apps.ipb.ac.id, ³muhammad_adam@apps.ipb.ac.id,
⁴mkhoirun_najib@apps.ipb.ac.id

ABSTRACT

The biodegradation process of groundwater pollutants can be modelled as a non-linear advection-dispersion-reaction Partial Differential Equations (PDE). To solve these equations, it requires the efficient numerical methods to obtain approximate solutions. The method-of-lines which is employed to get the approximate solutions produces a system of ordinary differential equation (ODE) as a result of the space discretization which is generally stiff and very large. In this case, this research uses the fifth-order Runge-Kutta method, which is known as a stable method so that it is expected to handle such a stiff ODE system. To improve its efficiency, the ODE system is converted into the vectorized system. In the first case example, it is simulated that the pollutant is concentrated in one location, while nutrient and microbe are distributed evenly throughout the area. For the second case example, pollutant and nutrient are evenly distributed throughout the area, while microbe is concentrated at eight locations within the simulation area. Numerical results for both cases using non vectorized and vectorized implementation show that their result have similar numerical accuracy outputs, but the vectorized implementation requires much less computing time. This study also compares our implementation of the 5th order Runge-Kutta and the Tsit5 method, the 5th order Runge-Kutta implementation provided by the package of *DifferentialEquation.jl* in Julia. The numerical simulation result shows that both have similar numerical solution accuracy. However, the Tsit5 method is less efficient than the implemented 5th order Runge-Kutta since it takes far more computing time.

Keywords: Advection-Dispersion-Reaction, Biodegradation, Julia, Method-of-Lines, Runge-Kutta

ABSTRAK

Masalah biodegradasi pencemar air tanah dapat dimodelkan berupa persamaan diferensial parsial (PDP) adveksi-dispersi-reaksi non-linear. Kompleksnya persamaan ini menuntut digunakannya metode numerik yang efisien untuk memperoleh hampiran solusi. *Method-of-Lines* yang digunakan untuk memberikan hampiran solusi tersebut, menghasilkan suatu sistem persamaan diferensial biasa (PDB) hasil diskritisasi ruang yang umumnya bersifat kaku dan berukuran sangat besar. Solusi numerik dari model dihitung menggunakan metode Runge-Kutta orde 5 yang dikenal stabil sehingga diharapkan mampu menangani sistem PDB yang kaku. Untuk meningkatkan efisiensi, sistem PDB yang diperoleh diformulasikan ulang ke dalam notasi matriks. Pada contoh kasus pertama, disimulasikan pencemar terkonsentrasi di satu lokasi dengan nutrisi dan mikroba tersebar merata di seluruh area. Pada contoh kasus kedua, pencemar dan nutrisi tersebar merata di seluruh area, sedangkan mikroba terkonsentrasi di delapan lokasi pada area simulasi tersebut. Hasil simulasi numerik untuk kedua kasus menunjukkan bahwa implementasi notasi matriks memberikan solusi numerik yang sama akurat dan jauh lebih efisien dibanding formulasi non-matriks. Penelitian ini juga membandingkan kinerja antara metode Runge-Kutta orde 5 diimplementasi dan metode Tsit5 disediakan package *DiferensialEquation.jl* pada perangkat lunak Julia. Hasil simulasi numerik menunjukkan keduanya memberikan solusi numerik yang sama akurat pada kedua contoh kasus. Namun demikian, metode Tsit5 kurang efisien dibandingkan metode Runge-Kutta orde 5 dalam segi waktu komputasi.

Kata kunci: Adveksi-dispersi-reaksi, biodegradasi, julia, method-of-lines, runge-kutta

Dikirim: 27 Januari 2022; Diterima: 11 Juli 2022; Dipublikasikan: 30 September 2022

Cara sitasi: Julianto, M.T., Nurdiati, S., Tripranoto, M. A., & Najib, M. K. (2020). Solusi numerik masalah bio-degradasi pencemar air tanah menggunakan *method-of-lines*. *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, 7(2), 381–392.

DOI: <http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v7i2.7102>

This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license



PENDAHULUAN

Pencemaran air tanah memiliki dampak yang sangat buruk, seperti berkurangnya persediaan air bersih, tingginya populasi bakteri yang berbahaya, dan turunnya tingkat kesehatan makhluk hidup. Teknik biodegradasi telah mendapat perhatian yang cukup besar dalam konteks pembersihan lokasi yang tercemar, karena biayanya yang relatif rendah (Bamforth & Singleton, 2005). Teknik biodegradasi dilakukan untuk menghilangkan pencemar yang tersebar di area tercemar menggunakan makhluk biologis sejenis mikroba (Julianto, 2000).

Pemodelan matematika sangat berguna untuk memahami mekanisme biodegradasi, menganalisis sensitivitas berbagai parameter yang mempengaruhi model dan efisien dalam menyelidiki berbagai strategi masalah biodegradasi pencemar air tanah (Dawson & Wheeler, 1992). Menurut Julianto (2000), secara lebih sederhana masalah biodegradasi pencemar air tanah dapat dimodelkan menjadi persamaan diferensial parsial (PDP) adveksi-dispersi-reaksi non-linear tanpa suku injeksi. Model tersebut merupakan persamaan kompleks, sehingga solusi tidak dapat ditentukan secara analitik. Oleh karena itu dibutuhkan suatu komputasi numerik untuk memberi hampiran solusi model biodegradasi pencemar air tanah.

Salah satu cara untuk menyelesaikan PDP yang memiliki kebergantungan terhadap waktu adalah menggunakan *method-of-lines* yang mendiskritisasi dimensi ruang dan membiarkan dimensi waktu tetap kontinu. Pendekatan ini menghasilkan sistem persamaan diferensial biasa (PDB), yang kemudian dapat diselesaikan dengan metode numerik, seperti Runge-Kutta orde 4 (Heath, 1997).

Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini menggunakan *method-of-lines* (MOL) untuk memperoleh sistem persamaan diferensial biasa (PDB) dan metode Runge-Kutta orde 5 (RK5) untuk menyelesaikan beberapa kasus simulasi numerik masalah biodegradasi pencemar air tanah. Tujuan yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah untuk menerapkan MOL dan metode RK5 pada masalah persamaan diferensial parsial biodegradasi pencemar air tanah menggunakan perangkat lunak Julia, kemudian mengubah bentuk sistem PDB ke dalam bentuk matriks dan membandingkan kinerja antara sistem PDB dalam bentuk matriks dan sistem PDB dalam bentuk non-matriks, serta membandingkan kinerja antara metode RK5 dan metode Tsitouras 5/4 Runge-Kutta (Tsit5) yang disediakan package *DifferentialEquations.jl* pada perangkat lunak Julia.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan studi literatur yang berkaitan dengan *Method-of-Lines* (MOL) untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) 2-dimensi yang memodelkan masalah bio-degradasi pencemar air tanah. MOL diawali dengan proses diskretisasi PDP menjadi sebuah sistem persamaan diferensial biasa (sistem PDB). Selanjutnya, solusi PDP diperoleh melalui penyelesaian sistem PDB tersebut menggunakan salah satu metode numerik.

Dalam penelitian ini digunakan metode beda pusat untuk melakukan diskretisasi PDP menjadi sistem PDB (Gupta, 2019; Noviyani *et al.*, 2019). Sistem PDB hasil diskretisasi kemudian diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 5 (RK5) dan Tsitouras 5/4 Runge-Kutta (Tsit5) menggunakan perangkat lunak Julia. Pada penelitian ini, diselesaikan beberapa kasus biodegradasi pencemar air tanah untuk nilai awal yang berbeda.

Julianto (2000) mengatakan bahwa sistem PDB hasil diskretisasi diimplementasi ke dalam bentuk tiga sistem persamaan secara langsung. Penelitian ini mencoba memodifikasi implementasi sistem PDB hasil diskretisasi tersebut menjadi bentuk matriks dan membandingkan kinerjanya terhadap bentuk non-matriks. Selain itu, solusi sistem PDB yang diselesaikan metode Runge-Kutta orde 5 dibandingkan dengan metode Tsitouras 5/4 Runge-Kutta (Tsit5) yang disediakan package *DifferentialEquations.jl* v6.15.0 pada perangkat lunak Julia. *DifferentialEquations.jl* adalah paket penyelesaian persamaan diferensial yang dikembangkan oleh *Scientific Machine Learning Software* (SciML) yang ditulis dalam Julia dan tersedia untuk perangkat lunak Julia, Python, dan R (Rackauckas & Nie, 2017; Rackauckas, 2020).

Method-of-Lines (MOL)

Method-of-Lines (MOL) adalah salah satu metode semi-diskrit yang menghampiri solusi dari suatu PDP yang memiliki ketergantungan waktu secara numerik dengan melakukan diskritisasi ruang dan menyisakan variabel waktu tetap kontinu (Heath, 2002). MOL dianggap sebagai *Finite Difference Method* (FDM) khusus karena lebih efektif sehubungan dengan akurasi dan waktu komputasi daripada FDM biasa.

Ide dasar dari MOL adalah mengubah turunan ruang pada PDP dengan pendekatan aljabar yaitu diskritisasi dimensi ruang. Setelah langkah tersebut dilakukan, turunan ruang tidak dinyatakan secara eksplisit dan hanya akan ada satu variabel bebas yang tersisa. Dari diskritisasi dimensi ruang diperoleh sistem PDB yang mendekati persamaan diferensial parsial semula. Setelah itu, bisa diterapkan salah satu metode penyelesaian PDB masalah nilai awal untuk menghitung solusi numerik terhadap sistem PDB tersebut (Hamdi *et al.*, 2007).

Menurut Heath (2002), sistem PDB hasil MOL tersebut umumnya bersifat sangat kaku (*stiff*). Metode numerik yang tidak stabil menyebabkan solusi sistem PDB berubah-ubah dengan cepat mengharuskan ukuran langkah yang digunakan sangat kecil untuk menjaga stabilitas, sehingga metode numerik yang dipilih harus stabil. Pada penelitian ini, bentuk sistem PDB yang telah ditentukan akan dihitung menggunakan metode Runge-Kutta orde 5.

Metode Runge-Kutta Orde 5 (RK5)

Menurut Munir (2003), metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode Runge-Kutta mengevaluasi fungsi $f(t, y(t))$ pada titik terpilih untuk setiap selang langkah. Tingkat ketelitian dari metode ini dipengaruhi oleh ordenya, semakin besar ordenya maka semakin teliti hasil yang diperoleh (Fardinah, 2017). Salah satu metode Runge-Kutta yang sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial adalah metode Runge-Kutta orde 5.

Bentuk dari metode Runge-Kutta orde 5 adalah:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{90} (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (1)$$

dengan

$$k_1 = f(t_r, y_r),$$

$$k_2 = f\left(t_r + \frac{1}{4}h, y_r + \frac{1}{4}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_r + \frac{1}{4}h, y_r + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right)$$

$$k_4 = f\left(t_r + \frac{1}{2}h, y_r - \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right)$$

$$k_5 = f\left(t_r + \frac{3}{4}h, y_r + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right)$$

$$k_6 = f\left(t_r + h, y_r - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h\right)$$

serta $h = t_{r+1} - t_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n$, $y_0 = y(t_0)$ dan $y_n \approx y(t_n)$ (Fardinah, 2017).

Model Biodegradasi Pencemar Air Tanah

Misalkan S menyatakan konsentrasi pencemar, O menyatakan konsentrasi nutrisi, dan M menyatakan konsentrasi mikroba. Persamaan adveksi-dispersi-reaksi non-linear masalah bio-degradasi pencemar air tanah dengan menghilangkan suku injeksi, dengan asumsi bahwa mikroba bersifat *immobile* (Julianto 2000). Dalam area pengamatan, mikroba tidak dipengaruhi oleh proses adveksi dan proses

dispersi, melainkan hanya proses reaksi yang dinyatakan dalam persamaan kinetik monod, sehingga model biodegradasi pencemar air tanah adalah berupa PDP seperti berikut:

$$\begin{aligned} \Phi R_1 \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot D(u) \nabla S + u \cdot \nabla S &= \Phi R_1 \cdot \mathfrak{R}_1(S, O, M) \\ \Phi \frac{\partial O}{\partial t} - \nabla \cdot D(u) \nabla O + u \cdot \nabla O &= \Phi \cdot \mathfrak{R}_2(S, O, M) \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \mathfrak{R}_3(S, O, M) \end{aligned} \quad (2)$$

dengan u adalah kecepatan Darcy, dan $D(u)$ adalah tensor dispersi hidrodinamik yang pada ruang 2-dimensi berupa

$$D(u) = D_m I + \frac{\alpha_l}{|u|} \begin{pmatrix} u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & u_y^2 \end{pmatrix} + \frac{\alpha_t}{|u|} \begin{pmatrix} u_x^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & u_y^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

dengan D_m adalah difusitas molekuler, α_l dan α_t masing-masing adalah dispersitas longitudinal dan transversal, u_x dan u_y masing-masing adalah kecepatan Darcy dalam arah sumbu x dan arah sumbu y. Sementara itu, $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$, dan \mathfrak{R}_3 adalah faktor kinetik monod yang didefinisikan oleh:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1(S, O, M) &= -M \cdot k \cdot \left(\frac{S}{K_S + S} \right) \cdot \left(\frac{O}{K_O + O} \right) \\ \mathfrak{R}_2(S, O, M) &= -M \cdot k \cdot f \cdot \left(\frac{S}{K_S + S} \right) \cdot \left(\frac{O}{K_O + O} \right) \\ \mathfrak{R}_3(S, O, M) &= M \cdot k \cdot Y \cdot \left(\frac{S}{K_S + S} \right) \cdot \left(\frac{O}{K_O + O} \right) + k_c \cdot Y \cdot OC - b \cdot M \end{aligned} \quad (4)$$

Parameter Simulasi Biodegradasi

Pada Persamaan (2) digunakan beberapa parameter simulasi yang bersumber dari Julianto (2000), Dawson & Wheeler (1991) serta Borden & Bedient (1986). Parameter fisik yang digunakan adalah porositas $\Phi = 0.25$, faktor retardasi terhadap absorpsi $R_1 = 2$, dispersitas longitudinal $\alpha_l = 10$ kaki, dispersitas transversal $\alpha_t = 1$ kaki, dan kecepatan Darcy $u = 20$ kaki²/hari. Sementara, parameter biodegradasi yang digunakan adalah kecepatan utilitas pencemar maksimum tiap unit massa mikroba $k = 0.17$ perhari, kecepatan peluruhan orde pertama dari karbon organik alami $k_c = 2.7 \times 10^{-6}$, konsentrasi karbon organik alami $OC = 750$, perbandingan nutrisi terhadap pencemar yang dikonsumsi $f = 3$, koefisien *yield* mikrobial $Y = 0.13$, konstanta saturasi setengah pencemar $K_S = 0.13$ mg/l, konstanta saturasi setengah nutrisi $K_O = 0.1$ mg/l, dan kecepatan peluruhan mikroba $b = 0.01$ perhari.

Tahapan Penelitian

Penelitian dilakukan melalui tahapan sebagai berikut:

1. Penulisan ulang model biodegradasi pencemar air tanah berupa PDP pada Persamaan (2) menjadi bentuk yang siap untuk dilakukan diskritisasi ruang.
2. Pendefinisian kasus-kasus model biodegradasi pencemar air tanah. Pada tahap ini digunakan dua kasus simulasi, yaitu kasus pencemar terpusat di satu lokasi dan kasus pencemar tersebar merata.

3. Diskritisasi ruang terhadap PDP menggunakan hampiran beda pusat pada kisi seragam (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots, N_x$, $y = 1, 2, \dots, N_y$ dengan $x_i = x_1 + (i-1)\Delta x$ dan $y_j = y_1 + (j-1)\Delta y$. Dalam penelitian ini digunakan $\Delta x = \Delta y$ demi kemudahan implementasi. Dari tahap ini, hasil diskritisasi PDP yang diperoleh berupa sistem PDB dengan masalah nilai awal berukuran besar, yaitu sebesar $3 \times N_x \times N_y$ persamaan.
4. Pendefinisian sistem PDB diimplementasi ke dalam dua bentuk, yaitu bentuk non-matriks dan matriks. Pada bentuk non-matriks, sistem PDB diimplementasi ke dalam bentuk tiga sistem persamaan langsung. Pada bentuk matriks, sistem PDB yang dituliskan ke dalam bentuk matriks.
5. Pencarian solusi numerik sistem PDB menggunakan metode Runge-Kutta orde 5. Dalam penelitian ini dibandingkan penggunaan metode Runge-Kutta orde 5 (RK5) pada Persamaan 1 dan metode Tsitouras 5/4 Runge-Kutta (Tsit5) yang disediakan oleh paket DifferentialEquations.jl pada perangkat lunak Julia 1.5.3.
6. Validasi hasil simulasi yang diperoleh dari tahap sebelumnya (solusi numerik sistem PDB) untuk kedua kasus simulasi.
7. Perbandingan kinerja implementasi sistem PDB dalam bentuk non-matriks dan matriks. Selain itu pada tahap ini, dibandingkan pula kinerja metode RK5 dan Tsit5 dalam menyelesaikan sistem PDB. Terdapat dua aspek yang dilihat dalam proses perbandingan, yaitu aspek akurasi dan aspek efisiensi (*run time*).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses komputasi pada penelitian ini dilakukan menggunakan komputer dengan prosesor Intel Core i7-10710U dan kapasitas RAM 64 GB. Sistem operasi yang digunakan adalah Microsoft Windows 10 Professional 64-bit dengan perangkat lunak Julia 1.5.3. Spesifikasi perangkat ini jauh lebih maju dibanding apa yang digunakan dalam Julianto (2000), sehingga memungkinkan digunakannya notasi matriks dalam implementasi sistem PDB hasil diskritisasi ruang, serta penggunaan perangkat lunak yang lebih modern. Dalam pembahasan berikut, ditunjukkan bagaimana penggunaan notasi matriks untuk meningkatkan kinerja penyelesaian numerik, serta perbandingan metode penyelesaian sistem PDB yang muncul dalam penyelesaian model biodegradasi pencemar air tanah

Penerapan *Method-of-Lines* pada Model Biodegradasi

Untuk memudahkan diskritisasi ruang, Persamaan (2) masing-masing dituliskan ulang ke dalam bentuk persamaan diferensial parsial (PDP) standar (Constanda, 2018) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \Phi R_1 \frac{\partial S}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} - u_x \frac{\partial S}{\partial x} - u_y \frac{\partial S}{\partial y} + \Phi R_1 \cdot \mathfrak{R}_1(S, O, M) \\ \Phi \frac{\partial O}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 O}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 O}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 O}{\partial x \partial y} - u_x \frac{\partial O}{\partial x} - u_y \frac{\partial O}{\partial y} + \Phi \cdot \mathfrak{R}_2(S, O, M) \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \mathfrak{R}_3(S, O, M) \end{aligned} \quad (5)$$

dengan

$$a = D_m + (\alpha_l u_x^2 + \alpha_t u_y^2) / |u|,$$

$$b = D_m + (\alpha_l u_y^2 + \alpha_t u_x^2) / |u|$$

$$c = 2u_x u_y (\alpha_l - \alpha_t) / |u|$$

Misalkan peubah $S_{i,j} = S(x_i, y_j)$, $O_{i,j} = O(x_i, y_j)$, dan $M_{i,j} = M(x_i, y_j)$ masing-masing menyatakan konsentrasi pencemar, nutrisi dan mikroba pada titik (x_i, y_j) di suatu ruang 2-dimensi. Hampiran beda pusat dari suku-suku turunan pencemar (S) pada Persamaan (5) adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &\approx \frac{S(x_i - \Delta x, y_j) - 2S(x_i, y_j) + S(x_i + \Delta x, y_j)}{\Delta x^2} = \frac{S_{i-1,j} - 2S_{i,j} + S_{i+1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &\approx \frac{S(x_i, y_j - \Delta y) - 2S(x_i, y_j) + S(x_i, y_j + \Delta y)}{\Delta y^2} = \frac{S_{i,j-1} - 2S_{i,j} + S_{i,j+1}}{\Delta y^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &\approx \frac{S(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y) - S(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y) - S(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) + S(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} \\ &= \frac{S_{i-1,j-1} - S_{i-1,j+1} - S_{i+1,j-1} + S_{i+1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \\ \frac{\partial S}{\partial x} &\approx \frac{S(x_i + \Delta x, y_j) - S(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x} = \frac{S_{i+1,j} - S_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial S}{\partial y} &\approx \frac{S(x_i, y_j + \Delta y) - S(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} = \frac{S_{i,j+1} - S_{i,j-1}}{2\Delta y} \end{aligned}$$

Hal yang sama dilakukan juga pada suku-suku turunan nutrisi (O). Substitusi hampiran suku-suku turunan tersebut terhadap Persamaan (5) menghasilkan sistem persamaan diferensial biasa (sistem PDB) hasil diskretisasi ruang yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dS_{i,j}}{dt} &= f_S(t, S_{i,j}, O_{i,j}, M_{i,j}) \\ &= \frac{1}{\Phi R_1} \left[\frac{c}{4\Delta x \Delta y} \cdot (S_{i-1,j-1} - S_{i+1,j-1} - S_{i-1,j+1} + S_{i+1,j+1}) + \left(\frac{2b}{2\Delta y^2} + \frac{u_y}{2\Delta y} \right) \cdot S_{i,j-1} \right. \\ &\quad + \left(\frac{2a}{2\Delta x^2} + \frac{u_x}{2\Delta x} \right) \cdot S_{i-1,j} - \left(\frac{2a}{\Delta x^2} + \frac{2b}{\Delta y^2} \right) \cdot S_{i,j} + \left(\frac{2a}{2\Delta x^2} - \frac{u_x}{2\Delta x} \right) \cdot S_{i+1,j} \\ &\quad \left. + \left(\frac{2b}{2\Delta y^2} - \frac{u_y}{2\Delta y} \right) \cdot S_{i,j+1} \right] + \mathfrak{R}_1(S_{i,j}, O_{i,j}, M_{i,j}) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{dO_{i,j}}{dt} &= f_O(t, S_{i,j}, O_{i,j}, M_{i,j}) \\ &= \frac{1}{\Phi} \left[\frac{c}{4\Delta x \Delta y} \cdot (O_{i-1,j-1} - O_{i+1,j-1} - O_{i-1,j+1} + O_{i+1,j+1}) + \left(\frac{2b}{2\Delta y^2} + \frac{u_y}{2\Delta y} \right) \cdot O_{i,j-1} \right. \\ &\quad + \left(\frac{2a}{2\Delta x^2} + \frac{u_x}{2\Delta x} \right) \cdot O_{i-1,j} - \left(\frac{2a}{\Delta x^2} + \frac{2b}{\Delta y^2} \right) \cdot O_{i,j} + \left(\frac{2a}{2\Delta x^2} - \frac{u_x}{2\Delta x} \right) \cdot O_{i+1,j} \\ &\quad \left. + \left(\frac{2b}{2\Delta y^2} - \frac{u_y}{2\Delta y} \right) \cdot O_{i,j+1} \right] + \mathfrak{R}_2(S_{i,j}, O_{i,j}, M_{i,j}) \end{aligned}$$

$$\frac{dM_{i,j}}{dt} = f_M(t, S_{i,j}, O_{i,j}, M_{i,j}) = \mathfrak{R}_3(S_{i,j}, O_{i,j}, M_{i,j})$$

dengan $x_i \in [0, L_x] = [0, 20]$, $i = 0, 1, \dots, N_x$, $y_j \in [0, L_y] = [0, 8]$, dan $j = 0, 1, \dots, N_y$. Setelah itu, peubah-peubah hasil diskritisasi ruang $(S_{i,j}, O_{i,j}, M_{i,j})$ disusun dalam urutan sebagai berikut:

$$U = \left[S_{1,1}, O_{1,1}, M_{1,1}, \dots, S_{N_x,1}, O_{N_x,1}, M_{N_x,1}, \dots, S_{N_x,N_y}, O_{N_x,N_y}, M_{N_x,N_y} \right]$$

Dengan notasi vektor di atas, Persamaan (6) dapat dituliskan secara ringkas sebagai sistem PDB berikut:

$$\frac{dU}{dt} = f(t, U) \tag{7}$$

Pada penelitian ini digunakan $N_x = 201$ dan $N_y = 81$, sehingga sistem PDB yang diperoleh berukuran $3 \times 201 \times 81 = 48\ 843$. Ukuran langkah yang digunakan adalah $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta y = 0.1$.

Sistem PDB (7) kemudian diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 5 untuk $t \in [0, 200]$, $N_t = 20001$, dan $\Delta t = 0.01$. Misalkan vektor solusi U_r dengan $r = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$ adalah nilai vektor U pada iterasi ke- r . Bentuk umum metode Runge-Kutta orde 5 (RK5) pada Persamaan (1) dapat dituliskan menjadi seperti berikut.

$$U_{r+1} = U_r + \frac{\Delta t}{90} (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \tag{8}$$

dengan

$$k_1 = f(t_r, U_r),$$

$$k_2 = f\left(t_r + \frac{1}{4}\Delta t, U_r + \frac{1}{4}k_1\Delta t\right)$$

$$k_3 = f\left(t_r + \frac{1}{4}\Delta t, U_r + \frac{1}{8}k_1\Delta t + \frac{1}{8}k_2\Delta t\right)$$

$$k_4 = f\left(t_r + \frac{1}{2}\Delta t, U_r - \frac{1}{2}k_2\Delta t + k_3\Delta t\right)$$

$$k_5 = f\left(t_r + \frac{3}{4}\Delta t, U_r + \frac{3}{16}k_1\Delta t + \frac{9}{16}k_4\Delta t\right)$$

$$k_6 = f\left(t_r + h, U_r - \frac{3}{7}k_1\Delta t + \frac{2}{7}k_2\Delta t + \frac{12}{7}k_3\Delta t - \frac{12}{7}k_4\Delta t + \frac{8}{7}k_5\Delta t\right)$$

Serta U_0 adalah nilai awal sistem persamaan diferensial biasa.

Simulasi Numerik

Pada kasus pencemar terpusat di satu lokasi, diasumsikan bahwa pencemar terkonsentrasi di suatu lokasi dengan kadar tinggi dan kadar sangat rendah di lokasi lain. Nutrien dan mikroba dalam kasus ini diasumsikan menyebar merata di seluruh area simulasi. Secara lengkap, nilai awal dan nilai batas yang digunakan pada kasus ini adalah sebagai berikut.

1. Nilai awal S berupa suatu fungsi *bell-shaped* untuk menjaga sifat kekontinuan fungsi agar dapat diturunkan.

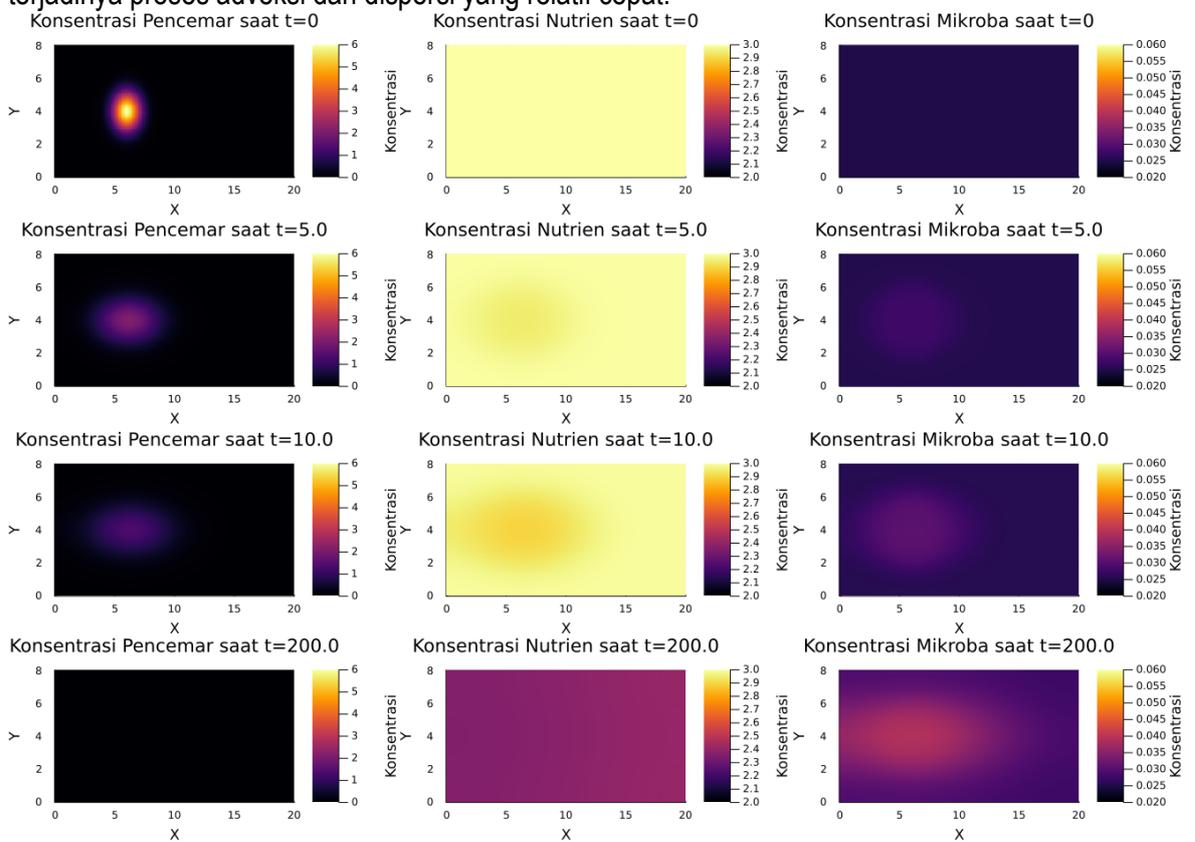
$$S(x, y, 0) = 0.01 + 6 \exp\left[-0.75 \cdot \left((x-6)^2 + (y-4)^2\right)\right] \tag{9}$$

2. Nilai awal O dan M berupa fungsi konstan $O(x, y, 0) = 3$ dan $M(x, y, 0) = 0.025$.

3. Nilai batas yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 S_x(0, y, t) &= O_x(0, y, t) = M_x(0, y, t) = 0 \\
 S_x(L_x, y, t) &= O_x(L_x, y, t) = M_x(L_x, y, t) = 0 \\
 S_y(x, 0, t) &= O_y(x, 0, t) = M_y(x, 0, t) = 0 \\
 S_y(x, L_y, t) &= O_y(x, L_y, t) = M_y(x, L_y, t) = 0 \\
 0 < x < 20, 0 < y < 8, 0 < t < 200
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Solusi numerik sistem PDB pada Persamaan (6) untuk kasus 1 ditunjukkan pada Gambar 1. Pada pencemar dan nutrisi terjadi proses adveksi-dispersi-reaksi, sedangkan pada mikroba hanya terjadi proses reaksi yang dipengaruhi oleh pencemar dan nutrisi. Proses adveksi mempengaruhi aliran air tanah yang bergerak secara horizontal. Sebaliknya, proses dispersi mempengaruhi tingkat peluruhan konsentrasi pencemar dan nutrisi tinggi. Hal ini dapat dilihat saat $t = 10$ konsentrasi pencemar mendekati nilai nol. Sementara itu, proses reaksi mempengaruhi konsentrasi mikroba dari terjadinya proses adveksi dan dispersi yang relatif cepat.



Gambar 1. Simulasi numerik kasus pencemar terpusat di satu lokasi pada saat $t = 0, 5, 10$, dan 200

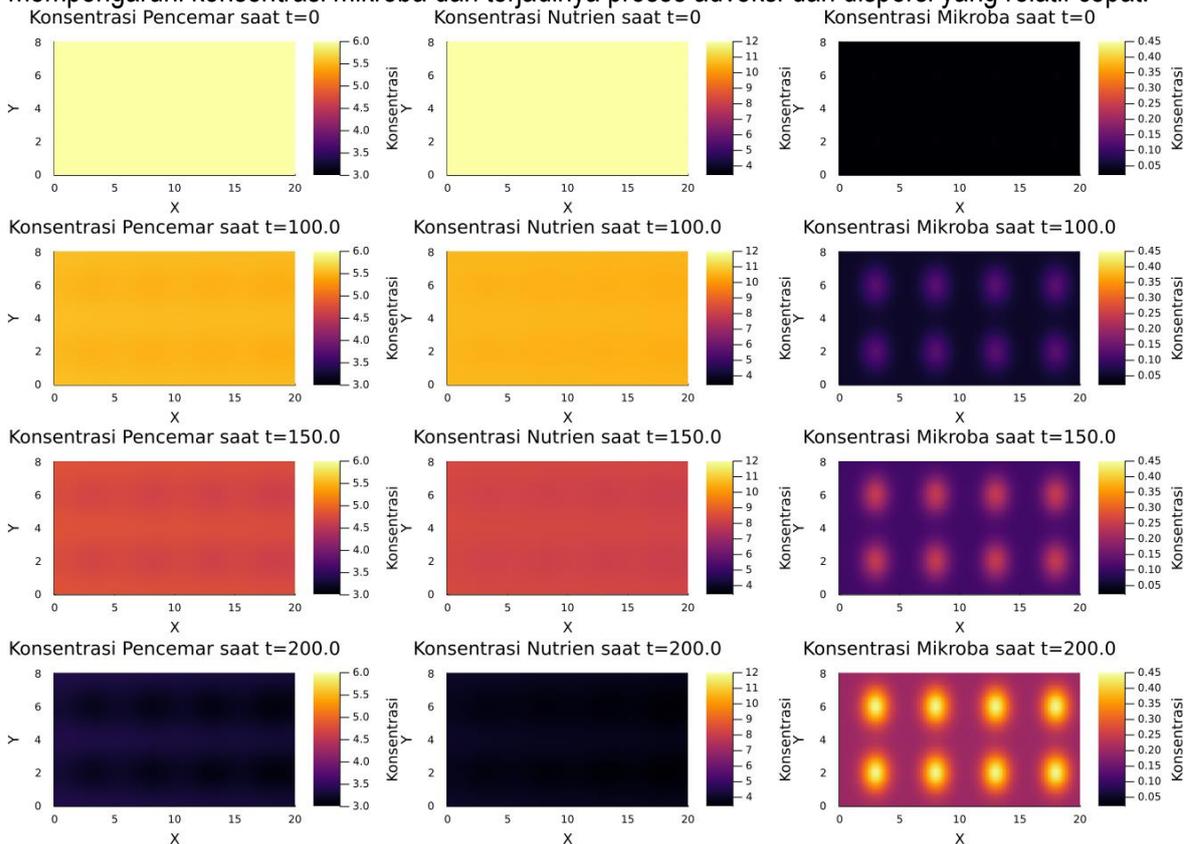
Pada kasus pencemar tersebar merata, diasumsikan bahwa pada awalnya mikroba terkonsentrasi di 8 lokasi pada area simulasi, dengan fungsi konsentrasi pada masing-masing lokasi berupa fungsi *bell-shaped* berikut.

$$M(x, y, 0) = 10^{-6} + 0.025 \exp \left[-0.75 \left((x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 \right) \right]
 \tag{11}$$

dengan $x_m = \{3, 8, 13, 18\}$ dan $y_m = \{2, 6\}$ adalah koordinat puncak dari fungsi *bell-shaped*. Nilai awal M dibuat berupa suatu fungsi *bell-shaped* untuk menjaga sifat kekontinuan fungsi agar dapat diturunkan di seluruh area simulasi.

Pencemar dan nutrisi dalam kasus ini diasumsikan menyebar secara merata di seluruh area simulasi. Nilai awal S dan O berupa fungsi konstan $S(x, y, 0) = 6$ dan $O(x, y, 0) = 12$. Nilai batas yang digunakan adalah nilai batas pada Persamaan (10).

Solusi numerik sistem PDB pada Persamaan (6) untuk kasus 1 ditunjukkan pada Gambar 2. Pada pencemar dan nutrisi terjadi proses adveksi-dispersi-reaksi, sedangkan pada mikroba hanya terjadi proses reaksi yang dipengaruhi oleh pencemar dan nutrisi. Proses adveksi mempengaruhi aliran air tanah yang bergerak secara horizontal. Sebaliknya, proses dispersi mempengaruhi tingkat peluruhan konsentrasi pencemar dan nutrisi rendah. Hal ini dapat dilihat dari $t = 0$ hingga $t = 100$ konsentrasi pencemar dan nutrisi baru mengalami penurunan. Sementara itu, proses reaksi mempengaruhi konsentrasi mikroba dari terjadinya proses adveksi dan dispersi yang relatif cepat.



Gambar 2. Simulasi numerik kasus pencemar tersebar merata pada saat $t = 0, 10, 100$, dan 200

Perbandingan Akurasi dan Efisiensi

Pada bagian ini dibandingkan akurasi dan efisiensi antara sistem PDB dalam bentuk matriks dan sistem PDB dalam bentuk non-matriks. Pada Julianto (2000), solusi sistem PDB dalam bentuk non-matriks pada kasus pencemar terpusat di satu lokasi dengan $t = 200$ membutuhkan waktu komputasi sangat lama. Dalam penelitian ini, modifikasi sistem PDB ke dalam bentuk matriks diharapkan menghasilkan solusi yang lebih efisien dan memiliki akurasi yang sama dibandingkan dengan bentuk non-matriks. Pada penelitian ini, digunakan plot *norm* vektor selisih untuk memeriksa kesamaan solusi numerik kedua sistem PDB yang digunakan.

Berdasarkan Tabel 1, terlihat bahwa nilai *norm* vektor selisih kedua solusi numerik selalu kurang dari 10^{-13} dan 10^{-12} masing-masing untuk kasus terpusat dan tersebar. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa solusi yang dihasilkan menggunakan implementasi matriks mampu memberikan solusi numerik yang sama akurat dengan implementasi non-matriks. Sementara itu, dari segi waktu komputasi, implementasi matriks jauh lebih efisien dibandingkan implementasi non-matriks.

Selain membandingkan akurasi dan efisiensi implementasi dalam bentuk matriks dan non-matriks, bagian ini juga membandingkan akurasi dan efisiensi metode penyelesaian sistem PDB yang digunakan, yaitu RK5 dan Tsit5. Berdasarkan Tabel 1, terlihat bahwa nilai *norm* vektor selisih kedua solusi numerik selalu kurang dari 10^{-12} dan 10^{-11} masing-masing untuk kasus terpusat dan tersebar. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa solusi numerik yang dihasilkan oleh metode RK5 dan Tsit5 hampir mirip satu sama lain. Akan tetapi dari segi waktu komputasi, metode RK5 dapat menyelesaikan masalah sistem PDB jauh lebih cepat dibandingkan dengan metode Tsit5 yang disediakan oleh paket DifferentialEquations.jl pada Julia.

Tabel 1. Perbandingan waktu komputasi dan kedekatan solusi numerik dengan implementasi matriks dan non-matriks serta metode RK5 dan Tsit5 dalam menyelesaikan masalah sistem PDB

Kasus pencemar	<i>Run time</i> (detik)		Kedekatan solusi (maks)	<i>Run time</i> (detik)		Kedekatan solusi (maks)
	Matriks	Non-matriks		RK5	Tsit5	
Terpusat	456	5146	10^{-13}	464	5752	10^{-12}
Tersebar	443	4954	10^{-12}	454	5689	10^{-11}

KESIMPULAN

Masalah biodegradasi pencemar air tanah dapat dimodelkan berupa persamaan diferensial parsial (PDP) adveksi-dispersi-reaksi non-linear. Model tersebut diselesaikan menggunakan *Method-of-Lines* (MOL) dan metode Runge-Kutta orde 5 untuk memperoleh hampiran solusi. Penggunaan MOL menghasilkan suatu sistem persamaan diferensial biasa (PDB) hasil diskritisasi ruang yang bersifat kaku dan berukuran besar, yaitu sistem PDB berukuran 48,843 persamaan. Hasil simulasi numerik untuk kedua kasus menunjukkan bahwa sistem PDB hasil diskritisasi mampu memperlihatkan proses adveksi-dispersi-reaksi. Selanjutnya, hasil simulasi numerik untuk kedua kasus menunjukkan bahwa implementasi notasi matriks memberikan solusi numerik yang sama akurat dan jauh lebih efisien dibanding formulasi non-matriks. Dalam penelitian ini, penulis juga mengimplementasikan sendiri metode Runge-Kutta orde 5 (metode RK5) lalu membandingkannya dengan metode Tsit5, yaitu implementasi Runge-Kutta orde 5 yang disediakan package DiferensialEquation.jl pada perangkat lunak Julia. Hasil simulasi numerik menunjukkan keduanya memberikan solusi numerik yang sama akurat pada kedua contoh kasus. Namun demikian, metode Tsit5 kurang efisien dibandingkan metode RK5.

REKOMENDASI

Dalam karya ilmiah ini telah dibahas penyelesaian persamaan diferensial parsial dua dimensi. *Method-of-Lines* dapat dikembangkan untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial lain. Dapat dilakukan penelitian lebih lanjut dalam menggunakan metode penyelesaian sistem persamaan diferensial biasa dengan orde yang lebih tinggi dari metode Runge-Kutta orde 5. Penyelesaian model biodegradasi pencemar air tanah dapat dibahas lebih lanjut dengan asumsi nilai batas yang berbeda-beda pada setiap sisi area simulasi.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada “Sejawat dan Institusi” atas segala dukungan dan fasilitas yang telah diberikan untuk menyelesaikan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Bamforth, S. M., & Singleton, I. (2005). Bioremediation of polycyclic aromatic hydrocarbons: Current knowledge and future directions. *Journal of Chemical Technology and Biotechnology*, 80(7), 723–736. <https://doi.org/10.1002/jctb.1276>

Borden, Robert C. Bedient, P. B. (1986). Transport of dissolved hydrocarbons influenced by oxygen-

limited biodegradation. *Water Resource Research*, 22(13), 1973–1982.

- Constanda, C. (2018). *Solution techniques for elementary partial differential equations* (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315381442>
- Dawson, C. N., & Wheeler, M. F. (1992). Time-splitting methods for advection-diffusion-reaction equations arising in contaminant transport. *Proceedings of the Second International Conference on Industrial and Applied Mathematics*, 71–82.
- Fardinah, F. (2017). Solusi persamaan diferensial biasa dengan metode runge-kutta orde lima. *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika Serta Aplikasinya)*, 5(1), 30. <https://doi.org/10.24252/jmsa.v5n1p30>
- Gupta, R. (2019). Partial differential equations: Finite difference methods. *Numerical Methods: Fundamentals and Applications* (pp. 679–778). Cambridge University Press.
- Hamdi, S., Schiesser, W., & Griffiths, G. (2007). Method of lines. *Scholarpedia*, 2(7), 2859. <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.2859>
- Heath, M. T. (1997). Scientific computing an introductory survey. *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, 363 (1833).
- Julianto, M. T. (2000). *Perbaikan kinerja VODPK untuk menyelesaikan sistem PDB biodegradasi pencemar air tanah* [Tesis]. Universitas Indonesia.
- Munir, R. (2003). *Metode numerik*. Bandung: Informatika.
- Noviyani, D., Yundari, & Yudhi. (2019). Solusi persamaan difusi pada larutan gula dengan metode beda hingga. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika, dan Terapannya*, 8(3). <https://doi.org/10.26418/bbimst.v8i3.34026>
- Rackauckas, C. (2020). *DifferentialEquations.jl: Scientific machine learning (SciML) enabled simulation and estimation*. SciML: Scientific Machine Learning Software. <https://diffeq.sciml.ai/v6.15/>
- Rackauckas, C., & Nie, Q. (2017). DifferentialEquations.jl – A performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in Julia. *Journal of Open Research Software*, 5. <https://doi.org/10.5334/jors.151>

