Teorema: *Teori dan Riset Matematika*, *8*(1), 88–99, Maret 2023
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2023
https://jurnal.unigal.ac.id/index.php/teorema/article/view/8029

APLIKASI DEKOMPOSISI RANK PADA PEMBENTUKAN INVERS MOORE-PENROSE MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS TERSIMETRI

Suroto[1*], Najmah Istikaanah[2], Sri Maryani[3]
[1,2,3] Universitas Jenderal Soedirman, Jl. Dr. Soeparno, Karangwangkal, Purwokerto Utara, Jawa Tengah, Indonesia
E-mail: suroto@unsoed.ac.id[1*]
**Corresponding Author*

ABSTRACT

This paper discusses the use of rank decomposition to construct the Moore-Penrose inverse in a symmetrized max-plus algebraic matrix. Determination of the existence of rank decomposition is done by utilizing a function that corresponds symmetrized max-plus algebra with conventional algebra. Furthermore, by utilizing the existence of a balanced inverse, the results of this rank decomposition are used to construct the Moore-Penrose inverse form of the matrix. The result obtained is the Moore-Penrose inverse form of a matrix over symmetrized max-plus algebra based on rank decomposition. These results can potentially be used to determine the solution of a linear balance system over symmetried max-plus algebra.

Keywords: *Balance, Moore-Penrose Inverse, Rank Decomposition, Symmetrized Max-Plus Algebra*

ABSTRAK

Pada makalah ini dibahas tentang penggunaan dekomposisi rank untuk mengonstruksi invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri. Penentuan eksistensi dekomposisi rank dilakukan dengan memanfaatkan suatu fungsi yang mengkorespondensikan aljabar max-plus tersimetri dengan aljabar konvensional. Selanjutnya, dengan memanfaatkan eksistensi invers setimbang, hasil dekomposisi rank ini digunakan untuk mengonstruksi bentuk invers Moore-Penrose dari matriks. Hasil yang diperoleh adalah bentuk invers Moore-Penrose dari suatu matriks atas aljabar max-plus tersimetri berdasarkan dekomposisi rank. Hasil ini berpotensi dapat dimanfaatkan untuk menentukan solusi dari sistem kesetimbangan linier atas aljabar max-plus tersimetri.

Kata kunci: Aljabar Max-Plus Tersimetri, Dekomposisi Rank, Invers Moore-Penrose, Setimbang

Dikirim: 23 Juni 2022; Diterima: 3 Februari 2023; Dipublikasikan: 31 Maret 2023
Cara sitasi: Suroto., Istikaanah, N., & Maryani, S. (2023). Aplikasi dekomposisi rank pada pembentukan invers moore-penrose matriks atas aljabar max-plus tersimetri. *Teorema*: *Teori dan Riset Matematika, 8*(1), 88–99. DOI: http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v8i1.8029

PENDAHULUAN

Pembahasan invers pada aljabar linier dilakukan pada matriks persegi berukuran $n \times n$. Eksistensi invers suatu matriks persegi pada aljabar berkaitan dengan determinan matriks tersebut. Untuk matriks persegi A, invers dari matriks A dinotasikan dengan A^{-1}. Untuk sistem persamaan linier $Ax = b$ dengan A^{-1} ada, maka solusi dari sistem persamaan linier tersebut adalah $x = A^{-1}b$ (Anton & Rorres, 2014). Pada saat membahas matriks A berukuran $m \times n$, maka invers yang dibicarakan adalah invers Moore Penrose yang dinotasikan dengan A^{+}. Untuk sistem persamaan linier $Ax = b$ dengan A^{+} adalah invers Moore-Penrose dari A, maka solusi pendekatan dari sistem persamaan linier tersebut adalah $x = A^{+}b$ (Campbell & Meyer, 2009). Beberapa penelitian yang berkaitan dengan pengembangan invers Moore-Penrose pada aljabar linier sudah dilakukan, antara lain review invers Moore-Penrose sebagai invers semu suatu matriks (Barata & Hussein, 2012), invers Moore-Penrose pada penelitian fisika (Baksalary & Trenkler, 2021) dan masalah pertubasi invers Moore-Penrose suatu matriks (Xu, 2019).

Beberapa dekomposisi matriks pada aljabar linier yang berkaitan dengan invers Moore-Penrose adalah dekomposisi rank, dekomposisi QR, dekomposisi Cholesky dan dekomposisi nilai singular. Pembahasan dekomposisi matriks pada aljabar linier merujuk pada (Golub & Van Loan, 2013) dan (Agarwal & Flaut, 2017). Dekomposisi-dekomposisi tersebut selanjutnya dapat digunakan untuk mengonstruksi invers Moore-Penrose suatu matriks. Konstruksi invers Moore-Penrose yang paling sederhana, dapat dilakukan dengan menggunakan dekomposisi rank. Ukuran dari matriks hasil dekomposisi tersebut, dikaitkan dengan rank dari matriks yang akan didekomposisikan. Beberapa pembahasan seputar pengembangan dekomposisi rank pada aljabar linier antara lain (Thapa *et al*., 2018) dan (Bonilla *et al*., 2018). Penelitian dekomposisi rank juga dikembangkan pada objek kajian semiring. Beberapa penelitian terkait dekomposisi rank pada matriks atas semiring antara lain pada (Le Van *et al*., 2015).

Aljabar max-plus merupakan suatu struktur aljabar $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $\oplus$ yang didefinisikan sebagai “maximum” dan operasi perkalian $\otimes$ yang didefinisikan sebagai “penjumlahan biasa”. Aljabar max-plus merupakan suatu semiring, sehingga semua elemen tidak memiliki invers penjumlahan, kecuali untuk elemen nol. Dengan demikian, perlu dilakukan suatu proses simetrisasi untuk memperoleh bentuk elemen yang berperan sebagai invers penjumlahan. Aljabar max-plus tersimetri $\mathbb{S}$ merupakan hasil simetrisasi dari aljabar max-plus dengan menggunakan relasi setimbang ∇. Proses simetrisasi pada aljabar max-plus dilakukan untuk memperoleh bentuk negatif dari setiap elemen pada aljabar max-plus. Bentuk negatif ini tidak dapat langsung berperan sebagai invers penjumlahan, tetapi hanya berperan untuk memperoleh bentuk setimbang (*balance*). Simetrisasi pada aljabar max-plus dapat dianalogikan dengan perluasan himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ menjadi himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ pada aljabar konvensional. Pembahasan mengenai aljabar max-plus tersimetri merujuk pada (Baccelli *et al*., 2001) dan (De Schutter, 1996).

Invers setimbang merupakan bentuk invers dari suatu matriks persegi atas $\mathbb{S}$ dengan menggunakan relasi setimbang. Pembahasan mengenai dapat didefinisikannya invers Moore-Penrose pada matriks atas $\mathbb{S}$ sudah dibahas pada (Suroto, 2021b). Pendefinisian ini dilakukan dengan memanfaatkan pendefinisian invers Moor-Penrose pada aljabar konvensional dengan mengganti relasi “sama dengan” pada aljabar linier menjadi relasi setimbang pada aljabar max-plus tersimetri. Selanjutnya, pembahasan mengenai eksistensi dari invers Moore-Penrose pada matriks atas $\mathbb{S}$ sudah dibahas pada (Suroto *et al*., 2022). Pada penelitian tersebut dibahas eksistensi setiap aksioma invers Moore-Penrose pada matriks atas $\mathbb{S}$ dengan menggunakan korespondensi fungsi antara aljabar max-plus tersimetri dengan aljabar konvensional.

Beberapa penelitian mengenai dekomposisi matriks atas aljabar max-plus tersimetri sudah dilakukan. Penelitian mengenai dekomposisi QR dan dekomposisi nilai singular atas $\mathbb{S}$ sudah dibahas pada (De Schutter & De Moor, 2002). Sementara eksistensi beberapa dekomposisi yang lain juga sudah dilakukan, yakni dekomposisi LU pada matriks atas $\mathbb{S}$ (Suroto *et al*., 2018), dekomposisi nilai eigen pada matriks simetri atas $\mathbb{S}$ (Suroto, 2021a) dan dekomposisi Cholesky serta aplikasinya pada sistem kesetimbangan linier atas $\mathbb{S}$ (Suroto *et al*., 2022b). Penelitian mengenai eksistensi dekomposisi rank pada matriks atas $\mathbb{S}$ belum dilakukan. Dengan menganalogikan pada aljabar linier, eksistensi dekomposisi rank ini akan dimanfaatkan untuk menentukan bentuk invers Moore-Penrose suatu matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan eksistensi dekomposisi rank dan mengaplikasikan hasil dekomposisi rank tersebut pada pembentukan invers Moore-Penrose suatu matriks atas aljabar max-plus tersimetri. Dekomposisi rank suatu matriks lebih mudah digunakan untuk membentuk invers Moore-Penrose dari matriks tersebut, dibandingkan dengan menggunakan dekomposisi-dekomposisi yang lainnya. Hal ini dikarenakan hasil dari matriks dekomposisi rank tersebut merupakan matriks rank kolom/baris penuh. Untuk selanjutnya, pendefinisian rank matriks atas $\mathbb{S}$ merujuk pada pendefinisian rank minor oleh (De Schutter, 1996). Karakterisasi rank dengan menggunakan kebebasan linier baris/kolom suatu matriks merujuk pada pembahasan (Suroto *et al*., 2022a). Hasil yang diperoleh pada penelitian ini berpotensi dapat dikembangkan pada konstruksi invers Moore-Penrose atas aljabar max-plus tersimetri dengan menggunakan dekomposisi yang lain yang sudah diperoleh sebelumnya, yakni dekomposisi LU, Cholesky, QR dan nilai singular. Selain itu juga berpotensi dapat dimanfaatkan pada penentuan solusi sistem kesetimbangan linier atas aljabar max-plus tersimetri.

Artikel ini disajikan dengan susunan sistematika yakni bagian awal menyajikan pendahuluan yang merupakan motivasi dan kebaruan dari penelitian. Bagian utama dari artikel ini disajikan pada hasil dan pembahasan yang berisi tentang eksistensi dekomposisi rank dan aplikasinya pada pembentukan invers Moore-Penrose matriks atas aljabar max-plus tersimetri. Bagian terakhir menyajikan kesimpulan dan rekomendasi untuk penelitian selanjutnya.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian literatur yang sifatnya mengkaji dan mengembangkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, yakni dapat dilakukannya pendefinisian invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri dengan menggunakan relasi setimbang (Suroto, 2021b) dan eksistensi invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri (Suroto *et al*., 2022). Pada penelitian ini dibahas aplikasi dekomposisi rank untuk membentuk invers Moore-Penrose suatu matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah:

1. Melakukan studi pustaka (*literature review*) mengenai aljabar max-plus tersimetri dan dekomposisi rank pada aljabar konvensional.
2. Menunjukkan eksistensi dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri. Langkah ini dilakukan dengan memanfaatkan suatu fungsi yang mengkorespondensikan aljabar max-plus tersimetri dengan aljabar konvensional pada (De Schutter & De Moor, 2002).
3. Menunjukkan eksistensi invers setimbang pada matriks hasil kali dekomposisi rank dengan transposenya.
4. Menentukan bentuk invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri dengan menggunakan hasil dekomposisi rank

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini disajikan pembahasan tentang eksistensi dekomposisi rank dan aplikasinya pada pembentukan invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri. Pada bagian ini terlebih dahulu disajikan definisi invers Moore-Penrose atas aljabar max-plus tersimetri, dengan mengadopsi pendefinisian invers Moore-Penrose pada aljabar konvensional. Relasi “sama dengan”pada aljabar konvensional diganti dengan relasi setimbang ∇ seperti berikut ini.

Definisi 1. *Diberikan matriks* $M \in \mathbb{S}^{m \times n}$. *Invers Moore-Penrose* M *adalah matriks* M^{+} *berukuran* $n \times m$ *yang memenuhi*

1. $M \otimes M^{+} \otimes M \nabla M$.
2. $M^{+} \otimes M \otimes M^{+} \nabla M^{+}$
3. $(M \otimes M^{+})^{T} \nabla M \otimes M^{+}$
4. $(M^{+} \otimes M)^{T} \nabla M^{+} \otimes M$

Selanjutnya diberikan suatu teorema untuk menjamin eksistensi dekomposisi rank yang akan digunakan untuk membentuk invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Teorema 1. *Jika* $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ *dengan rank minor* r, *maka terdapat matriks* $C \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m\times r}$ *dan* $F \in (\mathbb{S}^{\vee})^{r\times n}$ *sedemikian hingga* $A \nabla C \otimes F$

Bukti. Pada pembuktian ini hanya akan dibuktikan untuk matriks bertanda. Apabila $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ memiliki entri yang tidak bertanda, maka didefinisikan matriks $\hat{A} = \left[\hat{a}_{ij}\right] \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m\times n}$, yakni matriks yang entrinya adalah elemen bertanda $\hat{a}_{ij}$ dengan

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}\,, & a_{ij} \text{ bertanda} \\ \left|a_{ij}\right|_{\oplus}, & a_{ij} \text{ lainnya} \end{cases}$$

untuk setiap $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{S}$, apabila $a\nabla b$ maka juga berlaku $a^{\bullet}\nabla b$, sehingga untuk menunjukkan $A \nabla C \otimes F$ maka cukup ditunjukkan $\hat{A} \nabla C \otimes F$.

Dikonstruksikan bentuk $\tilde{A}(s) = \mathcal{F}(A, N, \cdot)$ dengan $N \in \mathbb{R}_0^{m\times n}$, $n_{ij} = 1$ untuk setiap i, j. Dengan demikian diperoleh entri-entri $\tilde{a}_{ij}(s) = \gamma_{ij}e^{c_{ij}s}$ untuk setiap $s \in \mathbb{R}_0^{+}, \gamma_{ij} \in \{-1,1\}$ dan $c_{ij} = \left|c_{ij}\right|_{\oplus} \in \mathbb{R}_{\mathcal{E}}$ untuk setiap i, j. Berdasarkan (De Schutter & De Moor, 2002), diperhatikan $\tilde{a}_{ij}(s) = \gamma_{ij}e^{c_{ij}s}$ merupakan elemen pada himpunan S_e , sehingga matriks $\tilde{A}(s)$ merupakan matriks dengan entri-entrinya pada S_e. Dengan demikian, operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian bisa dilakukan pada S_e. Akibatnya, operasi baris elementer pada matriks $\tilde{A}(s)$ juga bisa dilakukan. Langkah awal adalah melakukan operasi baris elementer pada $\tilde{A}(s)$ sampai diperoleh bentuk eselon baris tereduksi.

Misal $\tilde{P}(s) \in {S_e}^{n\times n}$ adalah matriks permutasi sedemikian hingga $\tilde{A}(s)\tilde{P}(s)$ dapat dipartisi dalam bentuk $\tilde{A}(s)\tilde{P}(s) = [\tilde{C}(s) \quad \widetilde{D}(s)]$ dengan $\tilde{C}(s)$ merupakan matriks yang kolomnya merupakan r buah kolom pivot dari $\tilde{A}(s)$. Selanjutnya kolom-kolom dari matriks $\widetilde{D}(s)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\tilde{d}_i(s) = \tilde{k}_1(s)\tilde{c}_1(s) + \tilde{k}_2(s)\tilde{c}_2(s) + \cdots + \tilde{k}_r(s)\tilde{c}_r(s)$$

untuk $i = 1,2,\dots,n-r$. Dari sini diperoleh bentuk $\widetilde{D}(s) = \tilde{C}(s)\tilde{G}(s)$ dengan $\tilde{G}(s)$ merupakan matriks yang bersesuaian dengan koefisien-koefisien pada persamaan $\tilde{d}_i(s)$. Selanjutnya

$$\tilde{A}(s)\tilde{P}(s) = [\tilde{C}(s) \quad \widetilde{D}(s)] = [\tilde{C}(s) \quad \tilde{C}(s)\tilde{G}(s)] = \tilde{C}(s)[\tilde{I}_r(s) \quad \tilde{G}(s)].$$

Dengan menggunakan matriks elementer $\tilde{E}(s)$, dilakukan proses merubah $\tilde{A}(s)$ sampai diperoleh bentuk matriks eselon tereduksi $\tilde{B}(s)$. Diperoleh

$$\tilde{E}(s)\left(\tilde{A}(s)\tilde{P}(s)\right) = \tilde{B}(s)\tilde{P}(s) = \tilde{E}(s)[\tilde{C}(s) \quad \widetilde{D}(s)] = \tilde{E}(s)\tilde{C}(s)[\tilde{I}_r(s) \quad \tilde{G}(s)]$$

dengan $\tilde{E}(s)\tilde{C}(s)$ berbentuk $\begin{bmatrix}\tilde{I}_r(s) \\ 0\end{bmatrix}$. Dengan demikian,

$$\tilde{B}(s)\tilde{P}(s) = \begin{bmatrix}\tilde{I}_r(s) & \tilde{G}(s) \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

dengan $[\tilde{I}_r(s) \quad \tilde{G}(s)]$ tak lain adalah baris yang tak nol dari bentuk eselon baris tereduksi. Dengan memisalkan $[\tilde{I}_r(s) \quad \tilde{G}(s)] = \tilde{F}(s)\tilde{P}(s)$ maka diperoleh bentuk

$$\tilde{A}(s)\tilde{P}(s) = \tilde{C}(s)[\tilde{I}_r(s) \quad \tilde{G}(s)] = \tilde{C}(s)\tilde{F}(s)\tilde{P}(s).$$

Misalkan $\tilde{A}(s) = \left[\tilde{a}_{ij}(s)\right]$ yakni $\tilde{A}(s)$ adalah matriks yang entri-entrinya adalah $\tilde{a}_{ij}(s)$ dan $\tilde{C}(s)\tilde{F}(s) = \left[\tilde{l}_{ij}(s)\right]$ yakni $\tilde{C}(s)\tilde{F}(s)$ adalah matriks yang entri-entrinya adalah $\tilde{l}_{ij}(s)$. Karena $\tilde{P}(s)$ adalah matriks permutasi maka berdasarkan pendefinisian ekuivalen asimtotis pada (De Schutter & De Moor, 2002) diperoleh bahwa

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\tilde{a}_{ij}(s)}{\tilde{l}_{ij}(s)} = 1.$$

Dengan demikian diperoleh suatu bentuk ekuivalen asimtotis $\tilde{A}(s) \sim \tilde{C}(s)\tilde{F}(s)$ untuk $s \to \infty$, yang merupakan bentuk dekomposisi rank dari matriks $\tilde{A}(s)$. Dengan menerapkan fungsi *reverse* $\mathcal{R}$ pada (De Schutter & De Moor, 2002), dan misalkan

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}\left(\tilde{A}(s)\right), C \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}\left(\tilde{C}(s)\right), F \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}\left(\tilde{F}(s)\right)$$

maka diperoleh

$$A \nabla C \otimes F$$

dengan $C \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m\times r}$ dan $F \in (\mathbb{S}^{\vee})^{r\times n}$. ■

Contoh berikut menjelaskan eksistensi dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Contoh 1. Diberikan matriks A dengan rank minor 2 sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix}.$$

Matriks bertanda dari matriks A adalah

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan dekomposisi rank dari A maka cukup dilakukan dengan menentukan dekomposisi rank dari matriks $\hat{A}$. Konstruksikan bentuk $\tilde{A}(s) = \mathcal{F}(A, N, \cdot)$ dengan $N \in \mathbb{R}_0^{m\times n}$, $n_{ij} = 1$ untuk setiap i, j. Dengan demikian diperoleh

$$\tilde{A}(s) = \begin{bmatrix} e^{s} & e^{2s} & -e^{s} \\ -e^{2s} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

untuk $s \in \mathbb{R}_0^{+}$. Proses operasi baris elementer diterapkan pada $\tilde{A}(s)$ sampai diperoleh bentuk eselon baris tereduksi, yakni

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \left(\frac{-1}{e^{3s}+1}\right) \\ 0 & 1 & \left(\frac{-e^{2s}}{e^{3s}+1}\right) \end{bmatrix}$$

untuk $s \in \mathbb{R}_0^{+}$. Dengan demikian diperoleh

$$\tilde{C}(s) = \begin{bmatrix} e^{s} & e^{2s} \\ -e^{2s} & 1 \end{bmatrix}, \tilde{F}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \left(\frac{-1}{e^{3s}+1}\right) \\ 0 & 1 & \left(\frac{-e^{2s}}{e^{3s}+1}\right) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e^{-3s} \\ 0 & 1 & -e^{-s} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\tilde{C}(s)\tilde{F}(s) = \begin{bmatrix} e^{s} & e^{2s} & \dfrac{-e^{s} - e^{4s}}{e^{3s}+1} \\ -e^{2s} & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} e^{s} & e^{2s} & -e^{s} \\ -e^{2s} & 1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}(s)$$

untuk $s \to \infty$. Dengan menerapkan fungsi *reverse* diperoleh

$$C = \mathcal{R}\left(\tilde{C}(s)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \ominus 2 & 0 \end{bmatrix}, F = \mathcal{R}\left(\tilde{F}(s)\right) = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} & \ominus(-3) \\ \mathcal{E} & 0 & \ominus(-1) \end{bmatrix}$$

dengan

$$C \otimes F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & (-1)^{\bullet} \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix} = A. \blacksquare$$

Misalkan A adalah matriks berordo $m \times n$ dengan rank r. Karena rank A adalah r maka terdapat r buah kolom matriks yang bebas linier, misalkan $c_1, c_2, \dots, c_r$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan c_1 adalah kolom pertama A, c_2 adalah kolom kedua A, ..., c_r adalah kolom ke-r A dan matriks C adalah matriks yang kolom pertamanya adalah c_1, kolom keduanya adalah c_2,..., kolom ke-$r$nya adalah c_r yakni

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_r].$$

Dari sini diperoleh bahwa C adalah matriks berordo $m \times r$ dengan rank minor r. Selanjutnya, vektor $c_1, c_2, \dots, c_r$ adalah vektor yang bebas linier. Dengan demikian matriks C adalah matriks berordo $m \times r$ dengan rank r, sehingga matriks C bersifat rank kolom penuh.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rn} \\ a_{(r+1)1} & \dots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} & \cdots & a_{(r+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{m(r+1)} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan submatriks persegi yang bersesuaian dengan rank minor r adalah

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian rank matriks

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ a_{(r+1)1} & \cdots & a_{(r+1)r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix}$$

adalah r. Misalkan dibentuk kesetimbangan $A \nabla C \otimes F$ seperti berikut ini

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rn} \\ a_{(r+1)1} & \dots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} & \cdots & a_{(r+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & a_{m(r+1)} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ a_{(r+1)1} & \cdots & a_{(r+1)r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \mathcal{E} & f_{1(r+1)} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E} & \cdots & 0 & f_{r(r+1)} & \cdots & f_{rn} \end{bmatrix}.$$

Matriks F memuat submatriks I_r yakni sumatriks persegi berordo $r \times r$ yang determinannya bukan elemen setimbang. Dengan demikian, rank matriks F adalah r.

Diperhatikan bahwa matriks $C^T \otimes C$ adalah matriks berordo $r \times r$. Apabila rank dari matriks $C^T \otimes C$ adalah r, maka $C^T \otimes C$ memuat submatriks persegi berordo $r \times r$ dengan determinanya tidak setimbang dengan $\mathcal{E}$. Dari sini diperoleh bahwa $\det(C^T \otimes C) \not\nabla \mathcal{E}$. Selanjutnya, matriks $F \otimes F^T$ juga merupakan matriks berordo $r \times r$. Apabila rank dari matriks $F \otimes F^T$ adalah r, maka $F \otimes F^T$ memuat submatriks persegi berordo $r \times r$ dengan determinanya tidak setimbang dengan $\mathcal{E}$. Dari sini diperoleh bahwa $\det(F \otimes F^T) \not\nabla \mathcal{E}$.

Lemma berikut menjelaskan hubungan determinan matriks atas aljabar max-plus tersimetri dengan matriks korespondensinya pada aljabar konvensional.

Lemma 1. *Diberikan* $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$ *dan* $\tilde{A}$ *adalah matriks konvensional yang berkorespondensi dengan matriks* A. *Apabila* $\det(A) \not\nabla \mathcal{E}$ *maka* $\det(\tilde{A}) \neq 0$.

Bukti. Determinan matriks A adalah $\det(A) = \bigoplus_{\sigma} \left(\mathrm{sign}(\sigma) \otimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right)$. Misal r_k untuk $k = 1,2,\dots,n!$ adalah hasil perkalian $\otimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ pada $\det(A)$, dengan $r_1^+, r_2^+, \dots, r_{\frac{n!}{2}}^+$ adalah hasil kali bertanda positif dan $r_1^-, r_2^-, \dots, r_{\frac{n!}{2}}^-$ adalah hasil kali bertanda negatif. Apabila $r^+ = r_1^+ \oplus r_2^+ \oplus \dots \oplus$

$r^+_{\frac{n!}{2}}$ dan $r^- = r^-_1 \oplus r^-_2 \oplus \ldots \oplus r^-_{\frac{n!}{2}}$ maka $r^+ \oplus r^- \nabla\!\!\!/ \mathcal{E}$. Misalkan entri a_{ij} pada A berkorespondensi dengan $\tilde{a}_{ij}$ pada $\tilde{A}$, dan $\tilde{r}_k$ untuk $k = 1,2,\ldots,n!$ adalah hasil perkalian $\otimes_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i\sigma(i)}$ pada $\det(\tilde{A})$ dengan $\tilde{r}^+_1, \tilde{r}^+_2, \ldots, \tilde{r}^+_{\frac{n!}{2}}$ adalah hasil kali bertanda positif, $\tilde{r}^-_1, \tilde{r}^-_2, \ldots, \tilde{r}^-_{\frac{n!}{2}}$ adalah hasil kali bertanda negatif. Hal ini mengakibatkan

$$\begin{aligned}\det(\tilde{A}(s)) &= \left(\tilde{r}^+_1(s) + \tilde{r}^+_2(s) + \cdots + \tilde{r}^+_{\frac{n!}{2}}(s)\right) + \left(\tilde{r}^-_1(s) + \tilde{r}^-_2(s) + \cdots + \tilde{r}^-_{\frac{n!}{2}}(s)\right)\\ &= \left(e^{r^+_1 s} + e^{r^+_2 s} + \cdots + e^{r^+_{\frac{n!}{2}} s}\right) + \left(e^{r^-_1 s} + e^{r^-_2 s} + \cdots + e^{r^-_{\frac{n!}{2}} s}\right)\\ &\sim e^{(r^+ s)\oplus(r^- s)} = e^{(r^+ \oplus r^-)s} \neq 0, \text{ untuk } s \to \infty.\end{aligned}$$

Karena $\det\left(\tilde{A}(s)\right) \sim e^{(r^+\oplus r^-)s} \neq 0$ untuk $s \to \infty$ maka $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{\det(\tilde{A}(s))}{e^{(r^+\oplus r^-)s}} = 1$ dan diperoleh $\det\left(\tilde{A}(s)\right) \neq 0$. Jadi, apabila $\det(A) \nabla\!\!\!/ \mathcal{E}$ maka $\det(\tilde{A}) \neq 0$. ■

Selanjutnya juga diberikan definisi dan eksistensi invers setimbang pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Definisi 2. (Invers Setimbang) *Diberikan matriks $A \in \mathbb{S}^{n\times n}$. Apabila terdapat matriks $B \in \mathbb{S}^{n\times n}$ sedemikian hingga $A \otimes B \nabla I_n$ dan $B \otimes A \nabla I_n$ maka A dikatakan invertibel setimbang, dan B dinamakan invers setimbang dari A.*

Lemma 2. *Diberikan matriks $A \in \mathbb{S}^{n\times n}$. Apabila $\det(A) \nabla\!\!\!/ \mathcal{E}$ maka terdapat $A_\nabla^{-1} \in (\mathbb{S}^\vee)^{n\times n}$ sedemikian hingga $A \otimes A_\nabla^{-1} \nabla I_n$ dan $A_\nabla^{-1} \otimes A \nabla I_n$*

Bukti. Misalkan $\tilde{A}(s)$ adalah matriks yang berkorespondensi dengan $\hat{A}$ seperti pendefinisian pada pembuktian Teorema 1. Karena diketahui $\det(A) \nabla\!\!\!/ \mathcal{E}$, maka menurut Lemma 1 diperoleh $\det(\tilde{A}) \neq 0$. Misalkan $\operatorname{cof}\left(\tilde{A}(s)\right)^T$ adalah transpose matriks kofaktor pada $\tilde{A}(s)$, maka $\frac{\tilde{A}(s) . \operatorname{cof}(\tilde{A}(s))^T}{\det(\tilde{A}(s))} \sim \tilde{I}_n$ dan $\frac{\operatorname{cof}(\tilde{A}(s))^T . \tilde{A}(s)}{\det(\tilde{A}(s))} \sim \tilde{I}_n$, untuk $s \to \infty$. Misal $A_\nabla^{-1} = \mathcal{R}\left(\frac{\operatorname{cof}(\tilde{A}(s))^T}{\det(\tilde{A}(s))}\right)$, menurut (De Schutter & De Moor, 2002) diperoleh bentuk ekuivalensi asimtotik $\hat{A} \otimes A_\nabla^{-1} \nabla I_n$ dan $A_\nabla^{-1} \otimes \hat{A} \nabla I_n$. Mengingat $\hat{A} \nabla A$ dengan $\hat{A}$ matriks bertanda maka $\hat{A}$ bisa disubstitusi lemah dengan A. Akibatnya $A \otimes A_\nabla^{-1} \nabla I_n$ dan $A_\nabla^{-1} \otimes A \nabla I_n$. Jadi diperoleh invers setimbang dari matriks A yakni $A_\nabla^{-1} \in (\mathbb{S}^\vee)^{n\times n}$ sedemikian hingga $A \otimes A_\nabla^{-1} \nabla I_n$ dan $A_\nabla^{-1} \otimes A \nabla I_n$.■

Berdasarakan uraian sebelumnya, diperoleh $\det(C^T \otimes C) \nabla\!\!\!/ \mathcal{E}$ dan $\det(F \otimes F^T) \nabla\!\!\!/ \mathcal{E}$. Dengan menerapkan Lemma 1, diperoleh $\det\left(\tilde{C}(s)^T \tilde{C}(s)\right) \neq 0$ dan $\det\left(\tilde{F}(s)\tilde{F}(s)^T\right) \neq 0$. Selanjutnya, menurut Lemma 2 diperoleh bahwa eksistensi invers setimbang untuk matriks $C^T \otimes C$ dan $F \otimes F^T$ terjamin ada.

Teorema berikut menjelaskan invers Moore-Penrose dari suatu matriks yang dibentuk dengan memanfaatkan dekomposisi rank dari matriks tersebut.

Teorema 2. *Misalkan $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ dengan rank minor $r \leq \min(m,n)$. Apabila $A \nabla C \otimes F$ adalah dekomposisi rank dari matriks A dengan $C \in (\mathbb{S}^\vee)^{m\times r}$, $F \in (\mathbb{S}^\vee)^{r\times n}$* dan rank$(C^T \otimes C) =$ rank$(F \otimes F^T) = r$, *maka matriks*

$$A^+ = F^T \otimes (F \otimes F^T)_\nabla^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_\nabla^{-1} \otimes C^T$$

merupakan invers invers Moore-Penrose dari A.

Bukti. Perhatikan bahwa pada pembuktian dekomposisi rank, yang ditunjukkan dekomposisinya adalah matriks bertanda $\hat{A}$. Dengan menerapkan sifat substitusi lemah, jika $\hat{A} \nabla C \otimes F$ dan $\hat{A} \nabla A$ dengan $\hat{A} \in (\mathbb{S}^\vee)^{m\times n}$ maka $A \nabla C \otimes F$. Perhatikan bahwa A^+ memenuhi

1. $A \otimes A^+ \otimes A$

$$\begin{aligned}&= A \otimes F^T \otimes (F \otimes F^T)_\nabla^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_\nabla^{-1} \otimes C^T \otimes A\\ &\nabla C \otimes F \otimes F^T \otimes (F \otimes F^T)_\nabla^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_\nabla^{-1} \otimes C^T \otimes C \otimes F\end{aligned}$$

$= C \otimes (F \otimes F^T) \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C) \otimes F$
$\nabla C \otimes I_r \otimes I_r \otimes F$
$= C \otimes F \nabla A$

2. $A^+ \otimes A \otimes A^+$
$= F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T \otimes A \otimes F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T$
$\nabla (F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T) \otimes C \otimes F \otimes (F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1}) \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T$
$= F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T \otimes C \otimes F \otimes (F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1}) \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T$
$= F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes I_r \otimes I_r \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T$
$= F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T$
$= A^+$

3. $(A \otimes A^+)^T$
$= (A \otimes F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T)^T$
$\nabla\ (C \otimes F \otimes F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T)^T$
$= (C \otimes I_r \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T)^T$
$= (C \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T)^T$
$= (C \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T)$
$= A \otimes A^+$

4. $(A^+ \otimes A)^T$
$= (F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T \otimes A)^T$
$\nabla\ (F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T \otimes C \otimes F)^T$
$= (F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes I_r \otimes F)^T$
$= (F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes F)^T$
$= F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes F$
$= A^+ \otimes A$

Dengan demikian $A^+ = F^T \otimes (F \otimes F^T)_{\nabla}^{-1} \otimes (C^T \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^T$ merupakan invers Moore-Penrose dari matriks A. ■

Contoh berikut menjelaskan invers Moore-Penrose suatu matriks yang dibentuk dari dekomposisi rank suatu matriks.

Contoh 2. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix}$ dengan rank minornya adalah 2. Matriks A dapat didekomposisikan sebagai $A \nabla C \otimes F$ dengan $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \ominus 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan $F = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} & \ominus(-3) \\ \mathcal{E} & 0 & \ominus(-1) \end{bmatrix}$. Diperhatikan bahwa

$$F \otimes F^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} & \ominus(-3) \\ \mathcal{E} & 0 & \ominus(-1) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & 0 \\ \ominus(-3) & \ominus(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^T \otimes C = \begin{bmatrix} 1 & \ominus 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \ominus 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Misalkan $K \stackrel{\text{def}}{=} F \otimes F^T$ dan $L \stackrel{\text{def}}{=} C^T \otimes C$. Selanjutnya dibentuk $\widetilde{K}(s) = \mathcal{F}(K, N_K, \cdot)$ dengan $N_K \in \mathbb{R}_0^{2\times 2}, n_{ij} = 1$ untuk setiap i, j dan $\tilde{L}(s) = \mathcal{F}(L, N_L, \cdot)$ dengan $N_L \in \mathbb{R}_0^{2\times 2}, n_{ij} = 1$ untuk setiap i, j. Dengan demikian diperoleh

$$\widetilde{K}(s) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-4s} \\ e^{-4s} & 1 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{L}(s) = \begin{bmatrix} e^{4s} & e^{3s} \\ e^{3s} & e^{4s} \end{bmatrix}$$

untuk $s \in \mathbb{R}_0^+$.

Selanjutnya dicari invers dari $\widetilde{K}(s)$dan $\tilde{L}(s)$. Diperhatikan $\det\left(\widetilde{K}(s)\right) = 1 - e^{-8s}$ dan $\det\left(\tilde{L}(s)\right) = e^{8s} - e^{6s}$, sehingga diperoleh

$$\left(\widetilde{K}(s)\right)^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-8s}}\begin{bmatrix} 1 & -e^{-4s} \\ -e^{-4s} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -e^{-4s} \\ -e^{-4s} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\tilde{L}(s)\right)^{-1} = \frac{1}{e^{8s} - e^{6s}}\begin{bmatrix} e^{4s} & -e^{3s} \\ -e^{3s} & e^{4s} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} e^{-4s} & -e^{-5s} \\ -e^{-5s} & e^{-4s} \end{bmatrix}$$

untuk $s \to \infty$. Selanjutnya dengan menerapkan fungsi *reverse* diperoleh

$$(F \otimes F^T)^{-1} = \mathcal{R}\left(\left(\widetilde{K}(s)\right)^{-1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \ominus(-4) \\ \ominus(-4) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C^T \otimes C)^{-1} = \mathcal{R}\left(\left(\tilde{L}(s)\right)^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -4 & \ominus(-5) \\ \ominus(-5) & -4 \end{bmatrix}$$

dengan

$$(F \otimes F^T) \otimes (F \otimes F^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & (-4)^{\bullet} \\ (-4)^{\bullet} & 0 \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix}$$

$$.\ (C^T \otimes C) \otimes (C^T \otimes C)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} \\ (-1)^{\bullet} & 0 \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian diperoleh $A^+ = F^T \otimes (F \otimes F^T)^{-1} \otimes (C^T \otimes C)^{-1} \otimes C^T$ yakni

$$A^+ = \begin{bmatrix} (-3)^{\bullet} & \ominus(-2) \\ -2 & -3 \\ \ominus(-3) & \ominus(-4) \end{bmatrix}.$$

Diperhatikan bahwa

1. $$A \otimes A^+ \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (-3)^{\bullet} & \ominus(-2) \\ -2 & -3 \\ \ominus(-3) & \ominus(-4) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1^{\bullet} & 2^{\bullet} & \ominus 1^{\bullet} \\ \ominus 2 & \ominus 1^{\bullet} & 0^{\bullet} \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix} = A$$

2. $$A^+ \otimes A \otimes A^+ = \begin{bmatrix} (-3)^{\bullet} & \ominus(-2) \\ -2 & -3 \\ \ominus(-3) & \ominus(-4) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (-3)^{\bullet} & \ominus(-2) \\ -2 & -3 \\ \ominus(-3) & \ominus(-4) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-3)^{\bullet} & \ominus(-2) \\ (-2)^{\bullet} & (-3)^{\bullet} \\ \ominus(-3)^{\bullet} & \ominus(-4)^{\bullet} \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} (-3)^{\bullet} & \ominus(-2) \\ -2 & -3 \\ \ominus(-3) & \ominus(-4) \end{bmatrix} = A^+$$

3. $$(A \otimes A^+)^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (-3)^{\bullet} & \ominus(-2) \\ -2 & -3 \\ \ominus(-3) & \ominus(-4) \end{bmatrix}\right)^T$$
$$= \begin{bmatrix} 0^{\bullet} & (-1)^{\bullet} \\ \ominus(-1)^{\bullet} & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0^{\bullet} & \ominus(-1)^{\bullet} \\ (-1)^{\bullet} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\nabla \begin{bmatrix} 0^{\bullet} & (-1)^{\bullet} \\ \ominus(-1)^{\bullet} & 0 \end{bmatrix} = A \otimes A^+$$

4. $$(A^+ \otimes A)^T = \left(\begin{bmatrix} (-3)^{\bullet} & \ominus(-2) \\ -2 & -3 \\ \ominus(-3) & \ominus(-4) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix}\right)^T$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \ominus(-2)^{\bullet} \\ (-1)^{\bullet} & 0^{\bullet} & \ominus(-1) \\ (-2)^{\bullet} & \ominus(-1)^{\bullet} & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & (-2)^{\bullet} \\ (-1)^{\bullet} & 0^{\bullet} & \ominus(-1)^{\bullet} \\ \ominus(-2)^{\bullet} & \ominus(-1) & -2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \ominus(-2)^{\bullet} \\ (-1)^{\bullet} & 0^{\bullet} & \ominus(-1) \\ (-2)^{\bullet} & \ominus(-1)^{\bullet} & -2 \end{bmatrix} = (A^{+} \otimes A)$$

Dengan demikian $A^{+} = \begin{bmatrix} (-3)^{\bullet} & \ominus(-2) \\ -2 & -3 \\ \ominus(-3) & \ominus(-4) \end{bmatrix}$ adalah invers Moore-Penrose dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2^{\bullet} & \ominus 1 \\ \ominus 2 & 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix}$. ■

Akibat 1. *Misalkan $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ dan $A^{+} = F^{T} \otimes (F \otimes F^{T})_{\nabla}^{-1} \otimes (C^{T} \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^{T}$ adalah invers Moore-Penrose dari A. Bentuk setimbang A^{+} yakni*

$$(A^{+})^{\bullet} = (F^{T} \otimes (F \otimes F^{T})_{\nabla}^{-1} \otimes (C^{T} \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^{T})^{\bullet}$$

juga merupakan invers Moore-Penrose dari A.

Bukti. Bentuk setimbang dari A^{+} yakni $(A^{+})^{\bullet}$ adalah matriks yang setiap entrinya adalah bentuk setimbang dari setiap entri pada A^{+}. Dengan demikian $a_{ij}^{+}\nabla\left(a_{ij}^{+}\right)^{\bullet}$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$. Selanjutnya, karena $A^{+} = F^{T} \otimes (F \otimes F^{T})_{\nabla}^{-1} \otimes (C^{T} \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^{T}$ memenuhi

1. $A \otimes A^{+} \otimes A \nabla A$
2. $A^{+} \otimes A \otimes A^{+} \nabla A^{+}$
3. $(A \otimes A^{+})^{T} \nabla A \otimes A^{+}$
4. $(A^{+} \otimes A)^{T} \nabla A^{+} \otimes A$

maka $(A^{+})^{\bullet}$ memenuhi

1. $A \otimes (A^{+})^{\bullet} \otimes A \nabla A$
2. $(A^{+})^{\bullet} \otimes A \otimes (A^{+})^{\bullet} \nabla (A^{+})^{\bullet}$
3. $(A \otimes (A^{+})^{\bullet})^{T} \nabla A \otimes (A^{+})^{\bullet}$
4. $((A^{+})^{\bullet} \otimes A)^{T} \nabla (A^{+})^{\bullet} \otimes A$.

Dengan demikian, $(A^{+})^{\bullet} = (F^{T} \otimes (F \otimes F^{T})_{\nabla}^{-1} \otimes (C^{T} \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^{T})^{\bullet}$ juga merupakan invers Moore-Penrose dari A. ■

Akibat 1 menjelaskan bahwa bentuk setimbang dari A^{+} yakni $(A^{+})^{\bullet}$ yang merupakan matriks yang entri-entrinya merupakan bentuk setimbang dari entri-entri pada A^{+}, juga memenuhi aksioma-aksioma invers Moore-Penrose matriks A. Selanjutnya diberikan contoh kasus penggunaan dekomposisi rank pada penyelesaian masalah sistem persamaan linier pada aljabar max-plus yang ditinjau dengan sebagai masalah sistem kesetimbangan linier menggunakan invers Moore-Penrose.

Contoh 3. Diberikan masalah sistem persamaan linier pada aljabar max-plus, yakni

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Masalah ini dapat disajikan sebagai masalah kesetimbangan linier $A \otimes X \nabla b$ yakni

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Diperhatikan bahwa rank minor matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah 2. Dekomposisi rank dari matriks A adalah $A \nabla C \otimes F$ dengan $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix}$ dan $\text{rank}(C) = \text{rank}(F) = 2$. Karena $C^{T} \otimes C = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ dan $F \otimes F^{T} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix}$, maka diperoleh $\det(C^{T} \otimes C)$ dan $\det(F \otimes F^{T})$ masing-masing tidak setimbang dengan $\mathcal{E}$. Dengan demikian, eksistensi invers setimbang untuk matriks $C^{T} \otimes C$ dan $F \otimes F^{T}$ terjamin ada,yakni

$$(C^{T} \otimes C)_{\nabla}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & \ominus(-9) \\ \ominus(-9) & -8 \end{bmatrix}$$

$$(F \otimes F^{T})_{\nabla}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} A^{+} &= F^{T} \otimes (F \otimes F^{T})_{\nabla}^{-1} \otimes (C^{T} \otimes C)_{\nabla}^{-1} \otimes C^{T} \\ &= \begin{bmatrix} \ominus(-5) & -3 \\ -4 & (-6)^{\bullet} \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} \ominus(-5) & -3 \\ -4 & \ominus(-7) \end{bmatrix} = A_{\nabla}^{-1}. \end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{+} \otimes b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3^{\bullet} \end{bmatrix}$, memenuhi kesetimbangan linier $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$. Dengan demikian $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3^{\bullet} \end{bmatrix}$ merupakan solusi kesetimbangan linier $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$. ■

KESIMPULAN

Eksistensi dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri dapat ditentukan dengan memanfaatkan rank minor matriks dan suatu fungsi yang mengkorespondensikan aljabar max-plus tersimetri dengan aljabar konvensional. Selanjutnya dengan memanfaatkan eksistensi invers setimbang, hasil dekomposisi rank tersebut dapat digunakan untuk membentuk invers Moore-Penrose suatu matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

REKOMENDASI

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, penulis merekomendasikan untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada konstruksi invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri dengan menggunakan dekomposisi-dekomposisi lainnya.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih pada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Jenderal Soedirman atas pendanaan melalui skim penelitian Riset Peningkatan Kompetensi tahun 2022, dengan kontrak nomor : T/861/UN.23.18/PT.01.03/2022.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, R. P., & Flaut, C. (2017). *An introduction to linear algebra* (1st ed.). Chapman and Hall, CRC Press, Taylor & Francis Group.

Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Elementary linear algebra* (11th ed.). Wiley, Canada.

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., & Quadrat, J.-P. (2001). *Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems* (2nd ed.). Wiley.

Baksalary, O. M., & Trenkler, G. (2021). The moore-penrose inverse: a hundred years on a frontline of physics research. *The European Physical Journal H*, *46*(9), 1–10.

Barata, J. C. A., & Hussein, M. S. (2012). The moore-penrose pseudoinverse: a tutorial review of the theory. *Brazilian Journal of Physics*, *42*, 146–165.

Bonilla, J. L., Vazquez, R. L., & Beltran, S. V. (2018). Full-rank factorization and moore-penrose's inverse. *MathLab Journal*, *1*(2), 227–230.

Campbell, S. L., & Meyer, C. D. (2009). *Generalized inverses of linear transformations*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

De Schutter, B. (1996). *Max-algebraic system theory for discrete event systems* [Dissertation]. Departemen of Electrical Engineering Katholieke Universiteit Leuven.

De Schutter, B., & De Moor, B. (2002). The qr decomposition and the singular value decomposition in the symmetrized max-plus algebra revisited. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, *44*(3), 417–454.

Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). *Matrix computations* (4th ed.). The John Hopkins University Press.

Le Van, T., Nijssen, S., Van Leeuwen, M., & De Raedt, L. (2015). Semiring Rank Matrix Factorization. *Journal of Latex Class File*, *14*(8), 1–14.

Suroto. (2021a). Eigenvalue decomposition of a symmetric matrix over the symmetrized max-plus algebra. *Desimal*, *4*(3), 349–356.

Suroto. (2021b). Invers moore-penrose pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri. *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*, *6*(2), 198–209.

Suroto, Istikaanah, N., & Renny. (2022). The existence of the moore-penrose inverse in symmetrized max-plus algebraic matrix. *Proceeding of SICOMAS 2021, Advances in Physics Research*, *5*.

Suroto, Palupi, D. J. E., & Suparwanto, A. (2022a). Characterization of rank of a matrix over the symmetrized max-plus algebra. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics*, *15*(4A), 843–856.

Suroto, S., Palupi, D. J. E., & Suparwanto, A. (2022b). The cholesky decomposition of matrices over the symmetrized max-plus algebra. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, *52*(3), 678–683.

Suroto, Suparwanto, A., & Palupi, D. J. E. (2018). The lu decomposition in the symmetrized max-plus algebra. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, *108*(2), 253–272.

Thapa, G. B., Bonilla, J. L., & Vazquez, R. L. (2018). A note on full-rank factorization of matrix. *Journal of the Institute of Engineering*, *15*(2), 152–154.

Xu, X. (2019). *On the Perturbation of the Moore-Penrose Inverse of a Matrix* (arXiv:1809.00203). arXiv. http://arxiv.org/abs/1809.00203