Teorema : Teori dan Riset Matematika, *09*(02), 291-304, September 2024
p-ISSN 2541-0660, e-ISSN 2597-7237 © 2024
https://jurnal.unigal.ac.id/teorema/article/view/14112

Penerapan Trilaterasi dan *Underdetermined Linear System* dalam Penentuan Posisi Objek di Bumi melalui *Global Positioning System* (GPS)

Jufra [1], La Pimpi [2], Arlita Aristianingsih Jufra [3], Alfian [4], Samsul Arifin [5]*, Nerru Pranuta Murnaka [6]
[1,2,4] *Universitas Halu Oleo, Jurusan Matematika, Kampus Hijau Bumi Tridharma, Sulawesi Tenggara 93232, Indonesia*
[3] *Institut Agama Islam Negeri Kendari, Jl. Sultan Qaimuddin No.17, Baruga, Sulawesi Tenggara 93870, Indonesia*
[5] *Sains Data, Fakultas Teknik dan Desain, Institut Teknologi Sains Bandung, 17530, Indonesia*
[6] *Jurusan Pendidikan Matematika, STKIP Surya, Tangerang, 15115, Indonesia*
Email: samsul.arifin@itsb.ac.id
*Corresponding author

ABSTRACT

As technology develops, the need to know the position of an object on the face of the earth is very important, especially in relation to human activities on the face of the earth. By using the Global Positioning System (GPS), an object on earth can be identified. The material used in this study is the concepts of matrix and vector algebra that can help in solving a system of linear equations formed from the calculation of the distance between satellites and receivers on earth. This distance is the length of the vector. The solution to the system of linear equations is the point that represents the location of an object on Earth's surface. The next material is about how Global Positioning System (GPS) works. This research uses the trilateration method to determine the position of objects on earth based on signals received from GPS satellites. Based on the results of the discussion, it can be concluded that the notion of matrix and vector algebra play an important role in determining the position of objects on earth, especially in the GPS. The concept used is to apply matrices and vectors from a linear equation system obtained based on the calculation of the distance from the satellite to the earthy object received by the receiver.

Keywords: *GPS, Matrix, Vector, Algebra*

ABSTRAK

Seiring dengan berkembangnya teknologi, kebutuhan untuk mengetahui posisi keberadaan suatu benda di muka bumi sangatlah penting terutama berkaitan dengan aktivitas manusia di muka bumi. Dengan menggunakan *Global Positioning System* (GPS), suatu benda di bumi dapat diketahui. Materi yang digunakan dalam penelitian ini adalah konsep matriks dan aljabar vektor yang dapat membantu dalam menyelesaikan sistem persamaan linear yang terbentuk dari perhitungan jarak antara satelit dan receiver di bumi. Jarak ini adalah panjang vektor. Solusi dari sistem persamaan linier adalah titik yang mewakili lokasi suatu objek di permukaan bumi. Materi selanjutnya adalah tentang cara kerja *Global Positioning System* (GPS). Penelitian ini menggunakan metode trilaterasi untuk menentukan posisi objek di bumi berdasarkan sinyal yang diterima dari satelit GPS. Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa. Aljabar matriks dan vektor berperan penting dalam menentukan posisi suatu benda di bumi, khususnya pada Global Positioning System (GPS). Konsep yang digunakan adalah dengan menerapkan matriks dan vektor dari sistem persamaan linier yang diperoleh berdasarkan perhitungan jarak satelit ke benda bumi yang diterima penerima.

Kata kunci: GPS, Matriks, Vektor, Aljabar.

Dikirim: April 2024; Diterima: Agustus 2024; Dipublikasikan: September 2024
Cara sitasi: Jufra, Pimpi, L., Jufra, A. A., Alfian, Arifin, S., & Murnaka, N. P. (2024). Penerapan Trilaterasi dan *Underdetermined Linear System* dalam Penentuan Posisi Objek di Bumi melalui *Global Positioning System* (GPS). *Teorema : Teori dan Riset Matematika, 09*(02), 291-304. DOI: http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v9i2.14112

PENDAHULUAN

Salah satu topik di dalam aljabar linier elementer yang sering digunakan di dalam bidang lainnya adalah matriks dan vektor. Seiring dengan berkembangnya teknologi, kebutuhan untuk mengetahui posisi keberadaan suatu benda di muka bumi sangatlah penting terutama berkaitan dengan aktivitas manusia di muka bumi. Dengan menggunakan *Global Positioning System* (GPS), suatu benda di bumi dapat diketahui. Karena konstelasi satelit dapat terlihat dari mana saja di dunia, kapan saja, dan menyediakan kemampuan navigasi global sepanjang waktu, GPS adalah teknologi yang sangat baik untuk survei hidrografi (Anton & Rorres, 2015; Krueger & Souza, 2014). Matriks dan vektor berperan dalam membantu penyederhanaan proses kerja GPS. Dengan teknologi GPS dapat digunakan untuk beberapa keperluan sesuai peruntukannya. GPS dapat digunakan oleh peneliti, olahragawan, petani, tentara, pilot, petualang, pendaki, pengantar barang, pelaut, kurir, penebang pohon, petugas pemadam kebakaran dan masyarakyat dari pengguna dari berbagai latar belakang untuk meningkatkan produktifitas, keamanan, dan untuk kenyamanan. Untuk menentukan arah yang harus ditempuh untuk sampai ke suatu tempat atau daerah, dengan mengetahui letak suatu daerah, jarak yang ditempuh dan waktu yang diperlukan untuk mencapai suatu daerah, dan hal seperti ini akan memakan waktu dan banyak biaya *(*Abdillah *et al*., 2021; Ibrahim *et al*., 2022; Larson, 2016).

Dalam penggunaannya, GPS membantu menentukan dimana letak suatu titik di permukaan bumi, membantu menemukan letak lokasi suatu titik di bumi atau navigasi, membantu memantau pergerakan benda atau tracking, membantu memetakan posisi tertentu, dan menghitung jaringan terdekat, dan dapat digunakan sebagai dasar untuk menentukan waktu jam dunia. Karena digunakan untuk sebuah atom jam presisinya biasa dibandingkan dengan jam pada umunya dengan mengabaikan posisi objeknya, baik itu di tengah laut, di tengah hutan, di gunung, atau di pusat kota. Selama GPS dapat menerima sinyal dari satelit secara langsung tanpa hambatan, maka GPS akan selalu memberikan informasi koordinat posisi. GPS memerlukan area pandang yang bebas langsung ke angkasa. Penghalang seperti pohon, gedung, bahkan kaca film sekelas V-Kool, dapat mengurangi keakuratan sinyal yang diterima GPS. Bahkan bukan tidak mungkin GPS sama sekali tidak bisa menerima sinyal dari satelit. GPS juga dilengkapi dengan fitur tambahan yang menyediakan informasi selama proses navigasi, seperti kecepatan, jarak tempuh, dan waktu tempuh. Ada cukup banyak konsep aljabar linier yang terlibat, dan rincian lengkap disajikan (Boyd & Vandenberghe, 2018; Sampath, 2023). Thompson (1998), memberikan penjelasan tambahan tentang matematika yang terlibat dalam perhitungan GPS. Dalam konteks penelitian ini, istilah "panjang vektor" merujuk pada magnitudo atau besaran dari suatu vektor, yang mewakili jarak antara dua titik, dalam hal ini antara satelit dan penerima GPS di bumi. Secara matematis, panjang vektor dihitung menggunakan norma Euclidean, yaitu akar kuadrat dari jumlah kuadrat komponen-komponen vektor. Dengan demikian, jarak antara satelit dan penerima pada GPS dapat dipandang sebagai panjang dari vektor posisi yang menghubungkan keduanya, dan inilah dasar utama dalam metode trilaterasi yang digunakan dalam penelitian ini. Penjelasan ini memberikan kejelasan mengenai hubungan antara konsep vektor dan jarak dalam perhitungan posisi berbasis GPS (Bogacki, 2019; Carlevaro-Fita & Johnson, 2019).

Global Positioning System (GPS) menggunakan penyelarasan sinyal satelit untuk mengidentifikasi suatu lokasi di permukaan dunia. Satelit GPS dapat terdeteksi di seluruh permukaan bumi dengan penampakan empat sampai delapan satelit dengan konfigurasi orbit tertentu. Peralatan penerima di permukaan menangkap sinyal ini, yang digunakan untuk memastikan posisi, kecepatan, arah, dan waktu. Ketepatan informasi posisi dan waktu yang diberikan oleh GPS cukup baik (Arifin & Garminia, 2018; Grewal *et al*., 2020). Metode trilaterasi dan *underdetermined linear system* dipilih dalam penelitian ini karena keduanya merupakan pendekatan matematis yang esensial dalam penentuan posisi menggunakan *Global Positioning System* (GPS). Trilaterasi digunakan untuk menghitung posisi objek di bumi berdasarkan jarak dari tiga atau lebih satelit, sedangkan *underdetermined linear system* memungkinkan penyelesaian sistem persamaan linier yang muncul dari ketidakcukupan data (jumlah persamaan lebih sedikit dibandingkan variabel yang dicari) yang sering terjadi dalam proses GPS. Kombinasi kedua metode ini memberikan hasil yang akurat dalam menentukan koordinat objek di bumi, baik dalam hal lintang, bujur, maupun ketinggian, sehingga metode ini sangat relevan untuk diterapkan dalam konteks penentuan posisi berbasis GPS (Aggarwal, 2020; Roberts, 2020; Specht, 2021). Berdasarkan latar belakang diatas, penulis tertarik untuk mengangkat judul penelitian "Penerapan Trilaterasi dan *Underdetermined Linear System* dalam Penentuan Posisi Objek Di Bumi melalui *Global Positioning System* (GPS)".

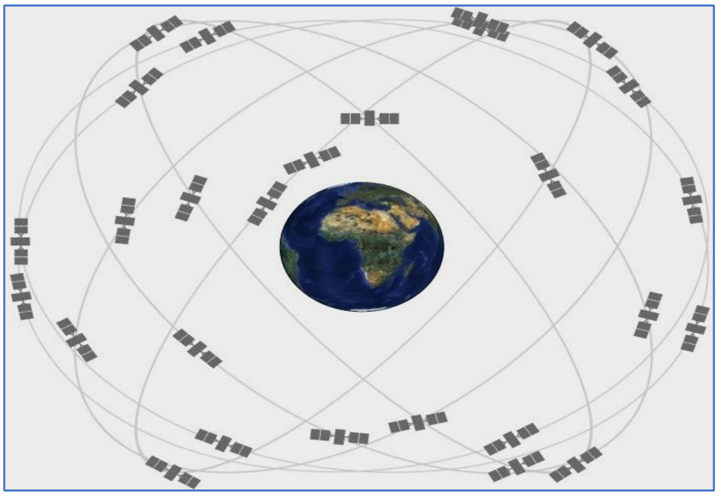
METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode trilaterasi untuk menentukan posisi objek di bumi berdasarkan sinyal yang diterima dari satelit GPS. Trilaterasi bekerja dengan menghitung jarak antara penerima GPS dan tiga satelit yang diketahui posisinya. Jarak tersebut dihitung sebagai norma vektor, yang menggambarkan panjang vektor antara satelit dan penerima di bumi. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data posisi satelit dan waktu yang dibutuhkan sinyal untuk sampai ke penerima. Setelah memperoleh data tersebut, langkah selanjutnya adalah menyusun sistem persamaan linier berdasarkan perbedaan jarak antar satelit dan penerima, yang kemudian diselesaikan untuk mendapatkan koordinat objek (Hashim, 2021; Noack, 2022). Ide-ide matriks dan aljabar vektor yang dapat digunakan untuk menyelesaikan serangkaian persamaan linier yang dibuat dengan menghitung jarak antara satelit dan penerima bumi menjadi pokok bahasan penelitian ini. Jarak ini adalah panjang vektor. Solusi dari sistem persamaan linier ini adalah titik yang menunjukkan letak benda di muka bumi. Materi selanjutnya adalah tentang cara kerja GPS (Arifin & Muktyas, 2021; Setiawan *et al*., 2022). Trilaterasi adalah metode geometri yang digunakan untuk menentukan lokasi suatu titik dengan mengukur jarak dari tiga titik referensi yang diketahui posisinya, dalam hal ini satelit GPS. Dalam konteks GPS, trilaterasi bekerja dengan menghitung jarak antara penerima GPS dan minimal tiga satelit. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut: Langkah 1, sinyal GPS dari setiap satelit mengirimkan data waktu tempuh yang digunakan untuk menghitung jarak antara satelit dan penerima. Langkah 2, jarak yang diperoleh dihitung sebagai panjang vektor, di mana jarak tersebut adalah norma vektor yang menghubungkan satelit dan penerima. Langkah 3, dari tiga jarak ini, metode trilaterasi diterapkan untuk menemukan koordinat posisi objek di bumi (lintang dan bujur). Langkah 4, jika ada satelit keempat, digunakan untuk menghitung ketinggian (altitude) objek. Proses ini diakhiri dengan penyelesaian sistem persamaan linier yang diperoleh dari perhitungan jarak antara satelit dan objek (Government, 2022; Isriyanto, 2015).

Selanjutnya, untuk memahami metode yang digunakan, perlu dijelaskan bahwa terdapat perbedaan antara metode trilaterasi dan algoritma Kalman. Metode trilaterasi berfokus pada pengukuran jarak dari satelit untuk menentukan posisi secara langsung, sedangkan algoritma Kalman adalah teknik estimasi yang digunakan untuk memprediksi dan mengoreksi posisi objek berdasarkan data yang diperoleh secara berurutan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini, kami memisahkan penjelasan kedua metode ini ke dalam sub bagian yang berbeda untuk memberikan kejelasan yang lebih baik mengenai penerapan masing-masing metode dalam konteks GPS (Nayak & Chitranshi, n.d.; Zhang, 2021). Lebih lanjut, tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: (a) Persiapan: Tahap awal ini adalah mengumpulkan literatur yang mendukung penelitian baik dari perpustakaan, browsing internet, atau dari sumber lain yang dapat memberikan wawasan terhadap permasalahan yang diteliti. (b) Tes penyebaran: Pada tahap ini peneliti melakukan uji materi aljabar matriks dan aljabar vektor yang diterapkan pada GPS. (c) Final : Tahap final adalah tahap penarikan kesimpulan. Langkah-langkah yang kami lakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: Langkah 1, menghitung jarak antara penerima GPS dengan setiap satelit menggunakan persamaan jarak; Langkah 2, menerapkan metode trilaterasi dengan memanfaatkan data jarak dari minimal tiga satelit untuk menentukan koordinat posisi objek; Langkah 3, menyelesaikan sistem persamaan linier untuk menemukan titik posisi objek di bumi; dan Langkah 4, melakukan koreksi dengan menambahkan data dari satelit keempat untuk menghitung ketinggian (altitude) objek (Desnanjaya *et al*., 2021; Kalman, 2002).

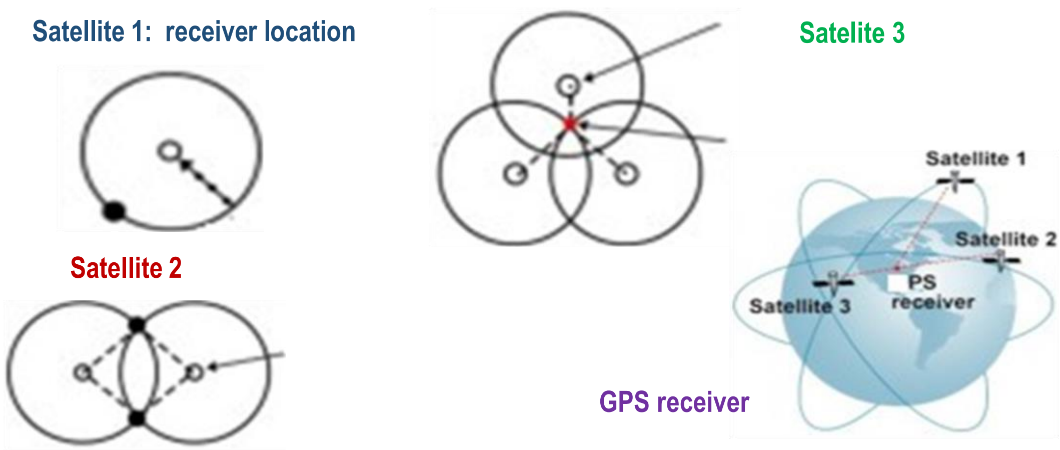
HASIL DAN PEMBAHASAN

Tiga bagian utama GPS yang bekerja sama untuk menghitung posisi pengguna digunakan untuk menemukan lokasi objek di Bumi. Ketiga bagian tersebut adalah penerima GPS, satelit GPS, dan stasiun bumi GPS. Stasiun berbasis bumi dikenal sebagai stasiun kendali darat. Jam atom dan pengoperasian satelit dikendalikan oleh stasiun. Selain itu, mereka memperbaiki sinyal satelit yang diterima sebelum mengembalikannya dan mengirimkan sinyal yang dikoreksi ke pengguna (Kalman, 2022) . Di Falcon Air Force, Colorado Springs, Ascension Island, Hawaii, Diego Garcia, dan Kwajalein, terdapat stasiun kendali. Minimal 24 satelit harus mengorbit planet ini pada jarak 11.000 mil laut, atau kira-kira 20.372 kilometer, untuk mengidentifikasi satelit GPS di luar angkasa. Ada 6 orbit untuk satelit. Empat satelit terus berputar mengelilingi dunia pada setiap orbitnya. Perangkat yang digunakan untuk menerima sinyal GPS disebut penerima GPS. Antena dan prosesor receiver yang terdapat pada receiver memberikan lokasi, kecepatan, dan ketepatan waktu kepada pengguna. Data dari satelit diterima oleh penerima setelah disesuaikan terlebih dahulu oleh stasiun pengendali (Garcia & Horn, 2017; Marjuki, 2016).



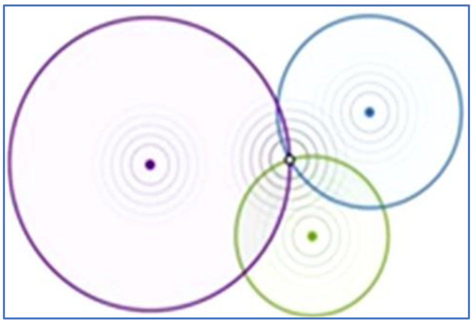
Gambar 1. Ilustrasi dari 24 satelit GPS yang mengelilingi bumi
(http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.jpg)

Berikut mengenai peranan matriks dan vektor dalam menentukan posisi (Arifin *et al*., 2021; Chillali, 2017):



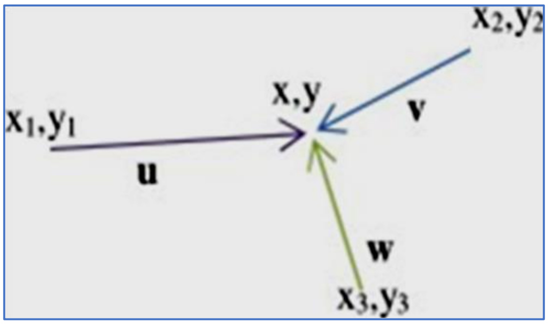
Gambar 2. Ilustrasi trilaterasi pada GPS
(https://www.buzzle.com/images/electronics/gps-tracking-technology.jpg)

Pada saat satelit mengirimkan sinyal terdapat perbedaan waktu antara jam atom di satelit dengan jam di bumi atau jam di penerima. Hal ini disebabkan oleh relativitas waktu yang terjadi, dimana jam yang dibumikan atau yang ada pada penerima bergerak lebih lambat akibat gaya gravitasi. Perbedaan ini dapat diatasi oleh pengembang GPS itu sendiri. Data posisi yang cukup akurat dapat diperoleh dengan cara penerima GPS harus mendapatkan sinyal dari 3-4 satelit. Jika GPS receiver mencegat sinyal dari 3 satelit, maka kita dapat mengetahui garis lintang dan garis bujur yaitu garis lintang dan garis bujur. Jika penerima GPS mendapat sinyal dari 4 satelit, kita bisa mengetahui ketinggiannya. Namun dengan menggunakan 3 satelit kita dapat mengetahui kemungkinan 2 titik dan GPS dapat menghilangkan salah satunya, karena salah satu titik tersebut tidak ada di bumi. Cara GPS menentukan posisi diperoleh dengan menghitung data yang diterima dari satelit seperti yang telah disebutkan sebelumnya bahwa penerima harus menerima sinyal dari 3 satelit. Penerima menghitung jarak dari setiap satelit dan menentukan posisinya. Metode ini dikenal dengan nama metode trilaterasi. Ilustrasi trilaterasi dapat dilihat pada Gambar 2 (Anton, 2018; Kianfar, 2022). Misalnya, kita mempunyai kasus trilater pada ion pada R^2 berikut:



Gambar 3. Kasus Trilaterasi pada R^2

Dalam bentuk matriks dan vektor, dapat mengambarkan/menjelaskan kasus trilaterasi, seperti berikut:



Gambar 4. Vektor pada Trilaterasi

Berikut definisi mengenai pengertian norma vektor:

Definisi 1 (Anton & Rorres, 2013). *Jika $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor dalam R^n, maka norma v (disebut juga panjang v atau besaran v) dilambangkan dengan $||v||$, dan didefinisikan dengan rumus*

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Jarak setiap satelit ke penerima, yaitu norma vektor dari setiap satelit ke penerima. Selain itu, kita juga mengetahui koordinat masing-masing penerima. Perhatikan bahwa Anton memberikan definisi panjang atau besar suatu vektor yang tertuang dalam Definisi 1 di atas. Dengan mengetahui kedua komponen tersebut kita dapat membuat persamaan sehingga tersisa variabel bebas *x*, *y* dan *z*. Dalam konteks penelitian ini, variabel u, v, dan w masing-masing mewakili jarak antara penerima GPS dan tiga satelit yang berbeda. Sementara itu, x1, x2, dan x3 adalah koordinat posisi masing-masing satelit dalam sistem koordinat kartesian. Penjelasan ini akan membantu untuk lebih memahami bagaimana setiap variabel berkontribusi dalam proses perhitungan posisi objek di bumi (Arifin *et al*., 2023; Arifin & Muktyas, 2018).

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \tag{1}$$
$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2$$
$$= x^2+x_1^2+y^2+y_1^2-2(xx_1+yy_1)$$
$$\|\boldsymbol{u}\|^2-(x^2+x_1^2+y^2+y_1^2) = -2(xx_1+yy_1) \tag{2}$$
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} \tag{3}$$
$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 = x^2+x_2^2+y^2+y_2^2-2(xx_2+yy_2)$$
$$\|\boldsymbol{v}\|^2-(x^2+x_2^2+y^2+y_2^2) = -2(xx_2+yy_2) \tag{4}$$
$$\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2} \tag{5}$$
$$\|\boldsymbol{w}\|^2 = (x-x_3)^2+(y-y_3)^2 = x^2+x_3^2+y^2+y_3^2-2(xx_3+yy_3)$$
$$\|\boldsymbol{w}\|^2-(x^2+x_3^2+y^2+y_3^2) = -2(xx_3+yy_3) \tag{6}$$

Selanjutnya persamaan (2) dikurangkan pada persamaan (4) diperoleh persamaan:

$$\|\boldsymbol{v}\|^2-\|\boldsymbol{u}\|^2+(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2) = 2\big((x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y\big) \tag{7}$$

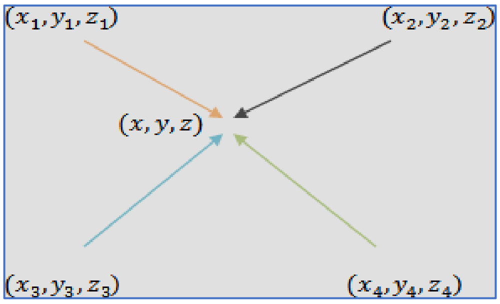
Jika persamaan (2) dikurangkan pada persamaan (6) diperoleh persamaan:

$$\|\boldsymbol{v}\|^2-\|\boldsymbol{u}\|^2+(x_1^2-x_3^2)+(y_1^2-y_3^2) = 2\big((x_1-x_3)x+(y_1-y_3)y\big) \tag{8}$$

Persamaan (7) dan (8) membentuk sistem persamaan linear dua variabel x dan y sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} 2\big((x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y\big) &= \|\boldsymbol{v}\|^2-\|\boldsymbol{u}\|^2+(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2) \\ 2\big((x_1-x_3)x+(y_1-y_3)y\big) &= \|\boldsymbol{w}\|^2-\|\boldsymbol{u}\|^2+(x_1^2-x_3^2)+(y_1^2-y_3^2) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Penyelesaian sistem persamaan linier (9) akan menunjukkan posisi hasil trilaterasi, dalam hal ini koordinat bujur dan lintang diketahui dengan bantuan 3 satelit. Sedangkan untuk menentukan ketinggian, dibutuhkan satu satelit lagi untuk bisa mengetahui ketinggiannya. Dalam hal ini diperlukan variabel ketiga yaitu z (Oliveira-Júnior *et al*., 2022; Pribadi *et al*., 2023). Perhatikan Gambar 5, berikut ini:



Gambar 5. Vektor pada 4 satelit

Jarak satelit ke receiver merupakan norma dari masing-masing satelit ke receiver, dimana kita sudah mengetahui koordinat masing-masing receiver (Isriyanto, 2015).

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \tag{10}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$
$$= x^2+x_1^2+y^2+y_1^2+z^2+z_1^2-2(xx_1+yy_1+zz_1)$$
$$2(xx_1+yy_1+zz_1) = (x^2+x_1^2+y^2+y_1^2+z^2+z_1^2)-\|\boldsymbol{u}\|^2 \tag{11}$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2} \tag{12}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2$$
$$= x^2+x_2^2+y^2+y_2^2+z^2+z_2^2-2(xx_2+yy_2+zz_2)$$
$$2(xx_2+yy_2+zz_2) = (x^2+x_2^2+y^2+y_2^2+z^2+z_2^2)-\|\boldsymbol{v}\|^2 \tag{13}$$

$$\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2} \tag{14}$$

$$\|\boldsymbol{w}\|^2 = (x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2$$
$$= x^2+x_3^2+y^2+y_3^2+z^2+z_3^2-2(xx_3+yy_3+zz_3)$$
$$2(xx_3+yy_3+zz_3) = (x^2+x_3^2+y^2+y_3^2+z^3+z_3^3)-\|\boldsymbol{w}\|^2 \tag{15}$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2} \tag{16}$$

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = (x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2$$
$$= x^2+x_4^2+y^2+y_4^2+z^2+z_4^2-2(xx_4+yy_4+zz_4)$$
$$2(xx_4+yy_4+zz_4) = (x^2+x_4^2+y^2+y_4^2+z^3+z_4^3)-\|\boldsymbol{w}\|^2 \tag{17}$$

Bila persamaan (11) dikurangi persamaan (13) diperoleh:

$$2\big((x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+(z_2-z_1)z\big) = (x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)+(z_2^2-z_1^2) +(\|\boldsymbol{u}\|^2-\|\boldsymbol{v}\|^2) \tag{18}$$

Persamaan (11) dikurangi pada persamaan (15) diperoleh:

$$2\big((x_3-x_1)x+(y_3-y_1)y+(z_3-z_1)z\big) = (x_3^2-x_1^2)+(y_3^2-y_1^2)+(z_3^2-z_1^2) +(\|\boldsymbol{u}\|^2-\|\boldsymbol{w}\|^2) \tag{19}$$

Selanjutnya persamaan (11) dikurangi persamaan (17) diperoleh:

$$2\big((x_4-x_1)x+(y_4-y_1)y+(z_4-z_1)z\big) = (x_4^2-x_1^2)+(y_4^2-y_1^2)+(z_4^2-z_1^2) +(\|\boldsymbol{u}\|^2-\|\boldsymbol{a}\|^2) \tag{20}$$

Persamaan (18), Persamaan (19), dan Persamaan (20) formulir A sistem dari linier persamaan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} 2\big((x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+(z_2-z_1)z\big) &= (x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)+(z_2^2-z_1^2)+(\|\boldsymbol{u}\|^2-\|\boldsymbol{v}\|^2) \\ 2\big((x_3-x_1)x+(y_3-y_1)y+(z_3-z_1)z\big) &= (x_3^2-x_1^2)+(y_3^2-y_1^2)+(z_3^2-z_1^2)+(\|\boldsymbol{u}\|^2-\|\boldsymbol{w}\|^2) \\ 2\big((x_4-x_1)x+(y_4-y_1)y+(z_4-z_1)z\big) &= (x_4^2-x_1^2)+(y_4^2-y_1^2)+(z_4^2-z_1^2)+(\|\boldsymbol{u}\|^2-\|\boldsymbol{w}\|^2) \end{aligned}\right\} (21)$$

Persamaan (21) menunjukkan hubungan antara jarak yang diukur dari penerima ke masing-masing satelit dan koordinat posisi objek yang ingin ditentukan. Dalam konteks penelitian ini, kita dapat menggunakan persamaan tersebut untuk menghitung posisi sebuah kapal yang berada di laut. Misalnya, jika jarak dari penerima GPS ke satelit pertama, kedua, dan ketiga adalah masing-masing d1, d2, dan d3, persamaan ini memungkinkan kita untuk membentuk sistem persamaan linier yang menghasilkan nilai koordinat lintang dan bujur objek (Gade, 2010). Penyelesaian sistem persamaan linear (21) akan menunjukkan posisi benda berupa garis lintang, garis bujur (longitude) dan ketinggian (altitude). Selanjutnya kita akan membahas tentang penerapan dalam studi kasus. Dalam hal ini penerapan matriks dan aljabar vektor pada GPS diambil dari makalah yang berjudul "an undetermined linear system for GPS by Dan Kalman" yang dalam makalah tersebut diasumsikan kartesius dan x, y, z dimana titik (0, 0, 0) adalah inti bumi dan satuan panjangnya dan setara dengan jari-jari bumi sehingga nilai sama dengan tinggi permukaan laut $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Pada makalah tersebut juga menyatakan bahwa kecepatan cahaya kira-kira sama dengan $0.47\ rad/10^{-2}$ detik. Dan itu rumus digunakan adalah, Di mana, $d_i = 0.47(t - t_i)$ adalah waktu yang diperoleh satelit t_i. Data yang diterima dari satelit adalah sebagai berikut, mungkin pada kenyataannya data yang diterima tidak seperti ini (Thompson, 1998). Ada 4 satelit yang digunakan:

Tabel 1 . Data dari satelit yang diterima receiver untuk posisi kapal

Satelit	Posisi	Waktu
1	(1.11, 2,55, 2.14)	1.29
2	(2.87, 0,00, 1.43)	1.31
3	(0,00, 1.08, 2.29)	2.75
4	(1.54, 1.01, 1.23)	4.06

Pertama kita akan mencari jarak dari satelit pertama ke kapal. Jaraknya dapat dicari dengan persamaan berikut ini:

$$d_1 = 0.47\ (t - 1.29)$$

Jarak tersebut dapat dipandang sebagai normal vektor sehingga dapat dicari dengan rumus:

$$d = \sqrt{(x-1.11)^2 + (y-2.55)^2 + (z-2.14)^2}$$

Jika $d = d_1$kemudian diperoleh

$$\sqrt{(x-1.11)^2 + (y-2.55)^2 + (z-2.14)^2} = 0.47\ (t - 1.29)$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1.11)^2 + (y-2.55)^2 + (z-2.14)^2 = 0.47^2(t-19{,}9)^2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - 2.22x + 1.23 + y^2 - 5.10y + 6.50 + z^2 - 4.28z + 4.57 = (x-1.11)^2 + (y-2.55)^2 + (z-2.14)^2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + y^2 + z^2 - 2.22x - 5.10y - 4.28z + 12.31 = 0.47^2(t^2 - 2.58t + 1.66)$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + y^2 + z^2 - 2.22x - 5.10y - 4.28z + 12.31 = 0.47^2\ t^2 - 0.57t + 0.36$$

Hal ini dapat dituliskan sebagai:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 0.47^2\ t^2 + 11.95 = 2.22x + 5.10y + 4.28z - 0.57t \quad (22)$$

Maka jarak masing-masing satelit ke dua ke kapal adalah:

$$d_2 = (0.47)(t - 1.31)$$

Norma vektor satelit kedua ke kapal:

$$d = \sqrt{(x - 2.87)^2 + (y - 0.00)^2 + (z - 1.43)^2}$$

Jika $d = d_2$kemudian diperoleh

$$\sqrt{(x - 2.87)^2 + (y - 0.00)^2 + (z - 1.43)^2} = (0.47)(t - 1.31)$$
$$\Leftrightarrow \ (x - 2.87)^2 + (y - 0.00)^2 + (z - 1.43)^2 = 0.47^2(t - 1.31)^2$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 - 5.74x + 8.23 + y^2 + z^2 - 2.86z + 2.04 = 0.47^2(t - 1.31)^2$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 + z^2 - 5.74x + 8.23 - 2.86z + 2.04 = 0.47^2(t^2 - 2.62t + 1.71)$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 + z^2 - 5.74x - 2.86z + 10.27 = 0.47^2t^2 - 0.58t + 0.38$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 + z^2 - 0.47^2t^2 + 9.90 = 5.74x + 2.86z - 0.58t$$

Sehingga diperoleh:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 0.47^2t^2 + 9.90 = 5.74x + 2.86z - 0.58t \tag{23}$$

Selanjutnya jarak satelit ketiga ke kapal adalah:

$$d_3 = (0.47)(t - 2.75)$$

Norma vektor satelit ketiga ke kapal:

$$d = \sqrt{(x - 0.00)^2 + (y - 1.08)^2 + (z - 2.29)^2}$$

Jika $d = d_3$kemudian diperoleh

$$\sqrt{(x - 0.00)^2 + (y - 1.08)^2 + (z - 2.29)^2} = (0.47)(t - 2.75)$$
$$\Leftrightarrow \ (x - 0.00)^2 + (y - 1.08)^2 + (z - 2.29)^2 = 0.47^2(t - 2.75)^2$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 - 2.16y + 1.17 + z^2 - 4.58z + 5.24 = 0.47^2(t^2 - 5.50t + 7.56)$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 + z^2 - 2.16y - 4.58z + 6.41 = 0.47^2t^2 - 1.21t + 1.67$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 + z^2 - 2.16y - 4.58z + 4.74 = 0.47^2t^2 - 1.21t$$

Jadi, kita bisa menulis

$$x^2 + y^2 + z^2 - 0.47^2t^2 + 4.74 = 2.16y + 4.58z - 1.21t \tag{24}$$

Terakhir, jarak satelit keempat ke kapal:

$$d_4 = (0.47)(t - 4.06)$$

Sedangkan norma vektor keempat satelit terhadap kapal adalah:

$$d = \sqrt{(x - 1.54)^2 + (y - 1.01)^2 + (z - 1.23)^2}$$

Jika $d = d_3$kemudian diperoleh

$$\sqrt{(x - 1.54)^2 + (y - 1.01)^2 + (z - 1.23)^2} = (0.47)(t - 4.06)$$
$$\Leftrightarrow \ (x - 1.54)^2 + (y - 1.01)^2 + (z - 1.23)^2 = 0.47^2(t - 4.06)^2$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 - 3.08x + 2.37 + y^2 - 2.02y + 1.02 + z^2 - 2.46z + 1.51 = 0.47^2(t^2 - 8.12t + 16.48)$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 + z^2 - 3.08x - 2.02y - 2.46z + 4.9 = 0.47^2t^2 - 1.79t + 3.64$$
$$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 + z^2 - 3.08x - 2.02y - 2.46z + 1.26 = 0.47^2t^2 - 1.79t$$

Jadi, kita bisa menulis

$$x^2 + y^2 + z^2 - 0.47^2t^2 + 1.26 = 3.08x + 2.02y + 2.46z - 1.79t \tag{25}$$

Selanjutnya Persamaan (22) dikurangkan terhadap Persamaan (23), diperoleh:

$$3.52x - 5.10y - 1.42z - 0.01t = -2.05 \tag{26}$$

Untuk pengurangan Persamaan (22) pada Persamaan (24) diperoleh :

$$-2.22x - 2.94y + 0.30z - 0.64 = -7.21 \tag{27}$$

Demikian pula persamaan (22) dikurangi persamaan (25) diperoleh :

$$0.86x - 3.08y - 1.82z - 1.22t = -10.69 \tag{28}$$

Persamaan (26), (27), (28) membentuk sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} 3.52x - 5.10y - 1.42z - 0.01t = -2.05 \\ -2.22x - 2.94y + 0.30z - 0.64 = -7.21 \\ 0.86x - 3.08y - 1.82z - 1.22t = -10.69 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Sistem persamaan linear (29) dapat dinyatakan dalam persamaan matriks:

$$\begin{bmatrix} 3.52 & -5.10 & -1.42 & -0.01 \\ -2.22 & -2.94 & 0.30 & -0.64 \\ 0.86 & -3.08 & -1.82 & -1.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.05 \\ -7.21 \\ -10.69 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Sistem persamaan linier yang ditulis dalam bentuk matriks seperti yang ditulis pada Persamaan (30) sesuai dengan Teorema 1 berikut.

Teorema 1 (Anton & Rorres, 2013). *Jika x_0 ada solusi dari sistem linier yang konsisten $Ax = b$, dan jika $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ merupakan basis untuk ruang nol A, maka setiap solusi $Ax = b$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x = x_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k$. Sebaliknya, untuk semua pilihan skalar $c_1, c_2, \ldots, c_k$, vektor x dalam rumus ini merupakan solusi dari $Ax = b$.*

Bagi banyak sistem, tidak mungkin mencapai identitas dalam matriks yang diperbesar melalui eliminasi Gaussian. Bagaimanapun, versi matriks tertentu yang memiliki jumlah maksimum komponen yang dihilangkan disebut Row Reduced Echelon Form (RREF). Untuk melengkapi matriks (30) dilakukan operasi baris dasar terhadap matriks yang diperbesar.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & -5.10 & -1.42 & -0.01 & -2.05 \\ -2.22 & -2.94 & 0.30 & -0.64 & -7.21 \\ 0.86 & -3.08 & -1.82 & -1.22 & -10.69 \end{array}\right] \tag{31}$$

Jumlahkan $\frac{2.22}{3.52}$ baris pertama berturut-turut pada dua matriks (31), diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & -5.10 & -1.42 & -0.01 & -2.05 \\ 0 & -6.16 & -0.59 & -0.65 & -8.50 \\ 0.86 & -3.08 & -1.82 & -1.22 & -10.69 \end{array}\right] \tag{32}$$

Selanjutnya $-\frac{1}{6.16}$dikalikan baris ke dua matriks (32), diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & -5.10 & -1.42 & -0.01 & -2.05 \\ 0 & 1 & 0.10 & 0.11 & 1.38 \\ 0.86 & -3.08 & -1.82 & -1.22 & -10.69 \end{array}\right] \tag{33 }$$

Tambahkan baris pertama$-\frac{0.86}{3.52}$ pada baris ke tiga kali matriks (33), diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & -5.10 & -1.42 & -0.01 & -2.05 \\ 0 & 1 & 0.10 & 0.11 & 1.38 \\ 0 & -1.83 & -1.47 & -1.21 & -10.19 \end{array}\right] \quad (34)$$

Selanjutnya dikalikan 1,83 kali baris kedua dengan baris ketiga matriks (34) diperoleh :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & -5.10 & -1.42 & -0.01 & -2.05 \\ 0 & 1 & 0.10 & 0.11 & 1.38 \\ 0 & 0 & -1.27 & -1.01 & -7.66 \end{array}\right] \quad (35)$$

Selanjutnya $-\frac{1}{1.27}$dikalikan baris ke tiga matriks (35), diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & -5.10 & -1.42 & -0.01 & -2.05 \\ 0 & 1 & 0.10 & 0.11 & 1.38 \\ 0 & 0 & 1 & 0.79 & 5.91 \end{array}\right] \quad (36)$$

Tambahkan kali baris ketiga – (0.10)pada baris kedua matriks (36) diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & -5.10 & -1.42 & -0.01 & -2.05 \\ 0 & 1 & 0 & 0.03 & 0.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0.79 & 5.91 \end{array}\right] \quad (37)$$

Tambahkan (5,10) kali baris ke a pada baris pertama matriks (37) diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & 0 & -1.42 & 0.14 & 2.08 \\ 0 & 1 & 0 & 0.03 & 0.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0.79 & 5.91 \end{array}\right] \quad (38)$$

Selanjutnya (1,42) dikalikan baris ketiga dengan baris pertama matriks (38), diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.52 & 0 & 0 & 1.26 & 10.47 \\ 0 & 1 & 0 & 0.03 & 0.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0.79 & 5.91 \end{array}\right] \quad (39)$$

Selanjutnya $\frac{1}{3.52}$baris pertama matriks pada (39), maka diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.36 & 2.97 \\ 0 & 1 & 0 & 0.03 & 0.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0.79 & 5.91 \end{array}\right] \quad (40)$$

Jadi penyelesaian sistem linier (40) adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.97 - 0.36t \\ 0.81 - 0.03t \\ 5.91 - 0.79t \end{bmatrix} \quad (41)$$

Akhirnya, kita mendapatkan:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2.97 - 0.36t \\ y = 0.81 - 0.03t \\ z = 5.91 - 0.79t \end{array}\right\} \quad (42)$$

Jika Persamaan (36) disubstitusikan ke Persamaan (22), maka diperoleh

$$\begin{aligned}&(2.97-0.36t)^2+(0.81-0.03t)^2+(5.91-0.79t)^2-0.22t^2+11.95\\&\quad=2.22(2.97-0.36t)+5.10(0.81-0.03t)+4.28(5.91-0.79t)-0.57t\\&\Leftrightarrow 8.82-2.14t+0.13t^2+0.66-0{,}05t+0.0009t^2+34.93-9.34t+0.62t^2-0.22t^2\\&\quad+11.95=6.59-0.80t+4.13-0.15t+25.29-3.38t-0.57t\end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh bentuk persamaan kuadrat dalam t yang ditulis sebagai

$$0.54t^2-6.65t+20.32=0 \quad (43)$$

Akar persamaan kuadrat (43) adalah $t=6.74$ dan $t=5.60$. Oleh karena itu, jika $t=6.74$ disubstitusikan ke Persamaan (42), maka diperoleh nilai:

$$\left.\begin{aligned}x&=2.97-0.36(6.74)=0.54\\y&=0.81-0.03(6.74)=0.61\\z&=5.91-0.79(6.74)=0.58\end{aligned}\right\} (44)$$

Berdasarkan perhitungan tersebut terlihat bahwa untuk nilai $t=6.74, x, y, z$nilainya masing-masing adalah 0.54; 0.61; 0.58. Selanjutnya berlaku $x^2+y^2+z^2=1$untuk koordinat Kartesius $(x,y,z)=(0.54;\ 0.61;\ 0.58)$. Dengan kata lain nilai $t=6.74$terpenuhi x, y, zsehingga diketahui kapal berada di tengah laut. Sebaliknya untuk t = 5,60 memberikan nilai x , y, dan z sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}x&=2.97-0.36(5.60)=0.95\\y&=0.81-0.03(5.60)=0.64\\z&=5.91-0.79(5.60)=1.48\end{aligned}\right\} (45)$$

Diperoleh x, y, z nilai setelah substitusi $t=5.60$ nilai masing-masing adalah 0.95; 0.64; 1.48. Dapat dilihat bahwa nilai $x^2+y^2+z^2=0.95^2+0.64^2+1.48^2=0.90+0.41+2.19=3.5\neq 1$. Hal ini menunjukkan bahwa nilai t = 5,60 belum mencukupi karena memiliki panjang yang tidak sama dengan satu berarti kapal tidak berada di permukaan laut. Jadi dapat disimpulkan bahwa yang bertemu ada pada Persamaan (44) dimana posisi kapal berada pada $(0.54;\ 0.61;\ 0.58)$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa. Aljabar matriks dan vektor berperan penting dalam menentukan posisi suatu benda di bumi, khususnya pada Global Positioning System (GPS). Konsep yang digunakan adalah dengan menerapkan matriks dan vektor dari sistem persamaan linier yang diperoleh berdasarkan perhitungan jarak satelit ke benda bumi yang diterima penerima. Pada studi kasus penerapan matriks dan aljabar vektor dimana objeknya adalah kapal di laut, hasil perhitungan menunjukkan bahwa lokasi kapal menurut GPS dapat diketahui berada pada (0.54, 0.61, 0.58).

REKOMENDASI

Berdasarkan hasil pembahasan Penerapan Matriks dan Aljabar Vektor pada Global Positioning System (GPS) di atas, maka saran peneliti. Diharapkan bagi peneliti selanjutnya untuk mengetahui objek lain di bumi dengan menggunakan matriks dan aljabar vektor pada GPS. Penelitian lebih mendalam dilakukan pada penerapan matriks dan aljabar vektor pada GPS. Peneliti selanjutnya dapat memperluas penerapan metode ini untuk penentuan posisi objek di lokasi yang lebih kompleks dengan data yang lebih presisi.

DAFTAR PUSTAKA

Abdillah, A. A., Azwardi, Permana, S., Susanto, I., Zainuri, F., & Arifin, S. (2021). Performance Evaluation Of Linear Discriminant Analysis And Support Vector Machines To Classify Cesarean Section. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, *5*(2–113), 37–43. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.242798

Aggarwal, A. K. (2020). Enhancement of GPS position accuracy using machine vision and deep learning techniques. *J. Comput. Sci*, *16*(5), 651–659.

Anton, H. (2018). *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, Limited. https://books.google.co.id/books?id=ypROEAAAQBAJ

Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.

Anton, H., & Rorres, C. (2015). *Elementary Linear Algebra: With Supplemental Applications. International student version*. New Delhi. https://books.google.co.id/books?id=WoLYtAEACAAJ

Arifin, S., Bayu Muktyas, I., & Iswara Sukmawati, K. (2021). Product of two groups integers modulo m,n and their factor groups using python. *Journal of Physics: Conference Series*, *1778*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1778/1/012026

Arifin, S., & Garminia, H. (2018). Valuation Dimension of Ring Zn Using Python. *International Journal of Engineering and Technology (UAE)*, *7*(4), 6351–6356. https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.16094

Arifin, S., & Muktyas, I. B. (2018). Membangkitkan Suatu Matriks Unimodular Dengan Python. *Jurnal Derivat: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *5*(2), 1–10.

Arifin, S., & Muktyas, I. B. (2021). Generate a system of linear equation through unimodular matrix using Python and Latex. *AIP Conference Proceedings*, *2331*. https://doi.org/10.1063/5.0041651

Arifin, S., Wijaya, A. K., Nariswari, R., Yudistira, I. G. A. A., Suwarno, Faisal, & Wihardini, D. (2023). Long Short-Term Memory (LSTM): Trends and Future Research Potential. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering (IJETAE)*, *13*(5), 24–35.

Bogacki, P. (2019). *Linear Algebra*. American Mathematical Society. https://books.google.co.id/books?id=3iKFDwAAQBAJ

Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press. https://books.google.co.id/books?id=IApaDwAAQBAJ

Carlevaro-Fita, J., & Johnson, R. (2019). Global positioning system: understanding long noncoding RNAs through subcellular localization. *Molecular Cell*, *73*(5), 869–883.

Chillali, A. (2017). Matrix encryption scheme. *Advances in Science, Technology and Engineering Systems*, *2*(4), 56–58. https://doi.org/10.25046/aj020408

Desnanjaya, I. G. M. N., Nugraha, I. M. A., & Hadi, S. (2021). Sistem Pendeteksi Keberadaan Nelayan Menggunakan GPS Berbasis Arduino. *Jurnal Sumberdaya Akuatik Indopasifik*, *5*(2), 157–168.

Gade, K. (2010). A Non-singular Horizontal Position Representation. *The Journal of Navigation*, *63*(3), 395–417. https://doi.org/https://doi.org/10.1017/S0373463309990415

Garcia, S. R., & Horn, R. A. (2017). *A Second Course in Linear Algebra*. Cambridge University Press. https://books.google.co.id/books?id=nXOuDgAAQBAJ

Government, U. (2022). *GPS Overview*. GPS.Gov.

Grewal, M. S., Andrews, A. P., & Bartone, C. G. (2020). *Global navigation satellite systems, inertial navigation, and integration*. John Wiley & Sons.

Hashim, H. A. (2021). GPS-denied navigation: Attitude, position, linear velocity, and gravity estimation with nonlinear stochastic observer. *2021 American Control Conference (ACC)*, 1149–1154.

Ibrahim, M. A., Arifin, S., Yudistira, I. G. A. A., Nariswari, R., Abdillah, A. A., Murnaka, N. P., & Prasetyo, P. W. (2022). AN EXPLAINABLE AI MODEL TO HATE SPEECH DETECTION ON INDONESIAN TWITTER. *CommIT (Communication and Information Technology) Journal*, *16*(2).

Isriyanto, K. (2015). *Penerapan Aljabar Vektor pada GPS (Global Positioning System)*. http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.jpg

Kalman, D. (2002). An Underdetermined Linear System for GPS. *The College Mathematics Journal*, *33*(5), 384–390. https://doi.org/10.1080/07468342.2002.11921968

Kianfar, A. E. (2022). *Ultra-wideband based positioning systems for harsh mining environment*. Dissertation, RWTH Aachen University, 2021.

Krueger, C. P., & Souza, A. V. De. (2014). THE GEODESY IN THE HYDOGRAPHY - A Geodésia na Hidrografia. *Revista Brasileira de Cartografia*, *International Issue*, 1485–1493.

Larson, R. (2016). *Elementary Linear Algebra*. Cengage Learning. https://books.google.co.id/books?id=2sQaCgAAQBAJ

Mama, M. (2008). *Mathematical Modelling of The Global Positioning System Tracking Signals*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:56552876

Marjuki, B. (2016). *Survei dan Pemetaan Menggunakan GPS* (Vol. 1). Bramantiyo Marjuki.

Nayak, S., & Chitranshi, M. (n.d.). *A Mathematical Approach to Global Positioning System*.

Noack, M. J. (2022). *Ultrasonic Trilateration for Clinical Measurement of Seated Posture During Wheelchair Seating and Positioning Assessment*. University of Colorado at Denver.

Oliveira-Júnior, O., Chiari, R., Lopes, W. R. T., Abreu, K. C., Lopes, A. D., Fialho, G., Lasmar, R. C. P., Bittencourt, N. F. N., & Leopoldino, A. A. O. (2022). VALIDATION AND RELIABILITY BETWEEN EXTERNAL LOAD ANALYSIS DEVICES FOR SOCCER PLAYERS | VALIDAÇÃO E CONFIABILIDADE ENTRE DISPOSITIVOS DE ANÁLISE DE CARGA EXTERNA PARA ATLETAS NO FUTEBOL | VALIDACIÓN Y CONFIABILIDAD ENTRE DISPOSITIVOS DE ANÁLISIS DE CARGA E. *Revista Brasileira de Medicina Do Esporte*, *28*(4), 286–290. https://doi.org/10.1590/1517-8692202228042021_0064

Pribadi, B., Rosdiana, S., & Arifin, S. (2023). Digital forensics on facebook messenger application in an android smartphone based on NIST SP 800-101 R1 to reveal digital crime cases. *Procedia Computer Science*, *216*(10.1016).

Roberts, A. (2020). *Linear algebra for the 21st century*. Oxford University Press.

Sampath, B. S. (2023). *Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy (CMA-ES) for GPS Receiver Position Estimation in Coastal Region of India*.

Setiawan, A., Prastowo, A. T., & Darwis, D. (2022). Sistem Monitoring Keberadaan Posisi Mobil Berbasis Gps Dan Penyadap Suara Menggunkan Smartphone. *Jurnal Teknik Dan Sistem Komputer*, *3*(1), 35–44.

Specht, M. (2021). Determination of navigation system positioning accuracy using the reliability method based on real measurements. *Remote Sensing*, *13*(21), 4424.

Thompson, R. B. (1998). Global Positioning System: The Mathematics of GPS Receivers. *Mathematics Magazine*, *71*, 260–269. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15857904

Zhang, J. (2021). *Optical wireless communication and positioning systems applying imaging techniques*.