

**BILANGAN INVERS DOMINASI TOTAL GRAF HELM TERTUTUP, GRAF GEAR,
GRAF RODA GANDA DAN GRAF ANTIWEB-GEAR****Nilamsari Kusumastuti¹, Fransiskus Fran²**^{1,2} Universitas Tanjungpura, Jl. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, Pontianak, Indonesia
Email: ²fransiskusfran@math.untan.ac.id**ABSTRACT**

This paper discusses inverse total domination number in a graph $G = (V, E)$ which is a simple, finite, undirected graph and without isolated vertices, where V is the set of vertices and E is the set of edges. The set $D \subseteq V$ is a dominating set in G if every element in $V - D$ is adjacent to at least one vertex in D . If $N(D) = V$, then D is called the total dominating set. The dominating set and total dominating is not unique. Let D be a total dominating set with the smallest cardinality. If $V - D$ contains a total dominating set D'_t then D'_t is called the inverse total dominating set. The smallest cardinality of the inverse total dominating is called the inverse total domination number which is denoted by $\gamma_t^{-1}(G)$. A graph that has a total domination set does not necessarily have an inverse total dominating set. In this case, the inverse of total dominance also cannot be determined. Therefore, in this paper, we determine the total dominance inverse of several graph classes, namely closed helm graph, gear graph, double wheel graph and antiweb-gear graph.

Keywords: domination number, inverse domination number, inverse total domination number

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang bilangan invers dominasi total pada suatu graf $G = (V, E)$ yang merupakan graf sederhana, berhingga, tak berarah dan tidak memuat simpul terasing, dengan V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Himpunan $D \subseteq V$ adalah himpunan dominasi di G jika setiap elemen di $V - D$ bertetangga sedikitnya dengan satu simpul di D . Jika $N(D) = V$, maka D disebut himpunan dominasi total. Himpunan dominasi dan dominasi total tidak tunggal. Dimisalkan D merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas terkecil. Jika $V - D$ memuat himpunan dominasi total D'_t maka D'_t disebut himpunan invers dominasi total. Kardinalitas terkecil dari himpunan invers dominasi total disebut bilangan invers dominasi total yang dilambangkan $\gamma_t^{-1}(G)$. Suatu graf yang mempunyai himpunan dominasi total belum tentu memiliki himpunan invers dominasi total. Untuk kasus tersebut, bilangan invers dominasi total juga tidak dapat ditentukan. Pada artikel ini, ditentukan bilangan invers dominasi total dari beberapa kelas graf yaitu graf helm tertutup, graf gear, graf roda ganda dan graf antiweb-gear.

Kata kunci: bilangan dominasi, bilangan invers dominasi, bilangan invers dominasi total

Dikirim: 14 Februari 2022; Diterima: 10 Juli 2022; Dipublikasikan: 30 September 2022

Cara sitasi: Kusumastuti, N., & Fran, F. (2022). Bilangan invers dominasi total graf helm tertutup, graf gear, graf roda ganda dan graf antiweb-gear. *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, 7(2), 321-330. DOI: <http://dx.doi.org/10.25157/teorema.v7i2.7211>

This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license



PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu bidang matematika diskrit yang mempelajari tentang graf, yaitu struktur matematika yang digunakan untuk memodelkan suatu objek, yang direpresentasikan dengan titik, dan hubungan diantara titik-titik, yang direpresentasikan dengan garis. Graf adalah suatu abstraksi matematis yang dapat digunakan untuk merepresentasikan berbagai jenis hubungan dan proses dari berbagai jenis objek: dalam sistem jaringan yang kompleks (misalnya, jaringan internet, jaringan listrik, jaringan sosial dan informasi (Adali & Ortega, 2018)), dan dalam bidang biologi (Shah *et al.*, 2019; Mashaghi *et al.*, 2004). Dalam beberapa kasus, representasi graf muncul sebagai cara alami untuk mendeskripsikan dan memberikan solusi untuk masalah keseharian seperti penyusunan jadwal, penyusunan rute perjalanan, membuat struktur organisasi dan pewarnaan peta (Adali & Ortega, 2018) serta permainan pewarnaan (Mujib, 2019).

Sejak diperkenalkan pertama kali pada tahun 1736 oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan Swiss, topik-topik dalam teori graf terus mengalami perkembangan, salah satunya terkait himpunan dominasi suatu graf. Himpunan dominasi pada suatu graf G dilambangkan dengan D adalah suatu himpunan bagian dari himpunan titik V , dimana setiap titik dari $V - D$ saling bertetangga setidaknya dengan satu diantara titik di himpunan D . Kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi D disebut bilangan dominasi yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Meskipun studi matematis tentang dominasi dalam graf dimulai sekitar tahun 1960, ada beberapa referensi tentang masalah yang berkaitan dengan dominasi sekitar 100 tahun sebelumnya. Pada tahun 1862, De Jaenisch berusaha menentukan minimum banyaknya ratu yang dapat menutupi (mendominasi) papan catur berukuran 8×8 (Tarr, 2010). Saat ini, ada banyak hal dalam topik himpunan dominasi yang terus dikembangkan seperti tentang pengembangan dan variasi dari himpunan dominasi yaitu *minus* dominasi, *fair* dominasi, himpunan dominasi total, himpunan invers dominasi, dan himpunan invers dominasi total.

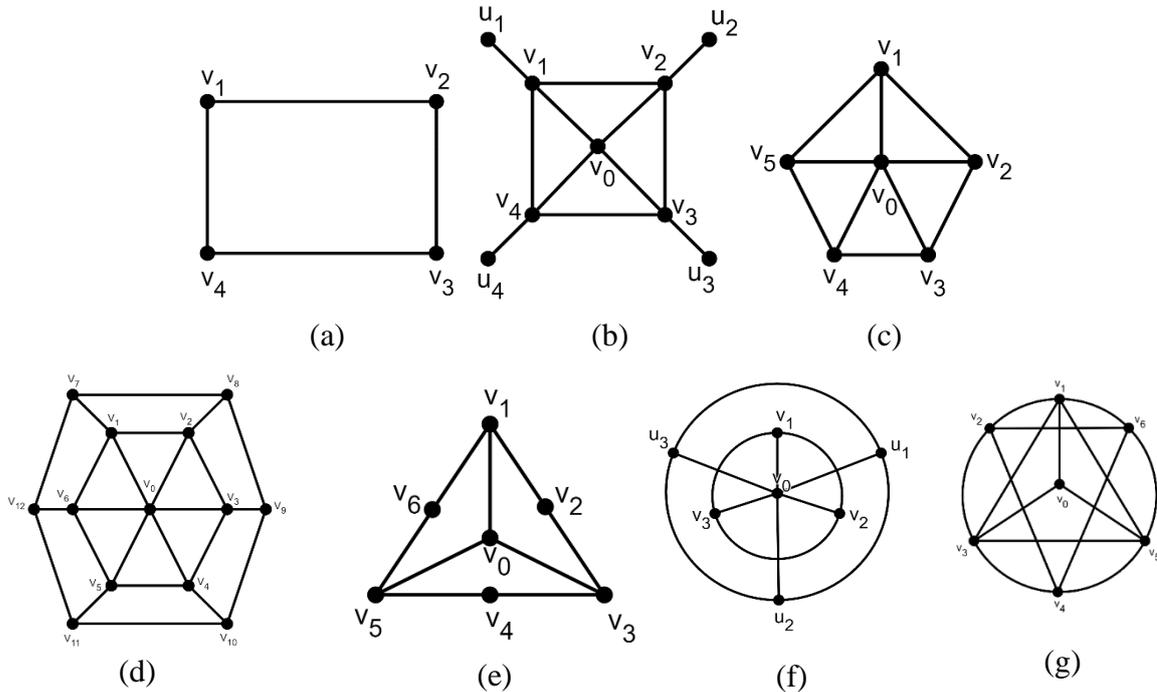
Penelitian mengenai bilangan dominasi, dominasi total dan bilangan invers dominasi total pada kelas-kelas graf tertentu telah menarik minat banyak peneliti (Dunbar *et al.*, 1999; El-Zahar *et al.*, 2008; Lan & Chang, 2013; Omran & Shalaan, 2020; Rusu & Spinrad, 2001). Terkait himpunan invers dominasi total, salah satu penerapannya yaitu pada jaringan komputer dengan kelompok komputer inti sebagai himpunan dominasi total dan kelompok komputer cadangan sebagai himpunan invers dominasi total (Kulli & Iyer, 2007). Meskipun demikian, sejak diperkenalkan pada tahun 2007, penelitian tentang bilangan invers dominasi total masih sangat terbuka, khususnya mengenai bilangan invers dominasi total untuk kelas graf tertentu. Secara khusus, hal ini terkait dengan beberapa graf yang mungkin saja tidak memiliki himpunan invers dominasi total (Kulli & Iyer, 2007). Untuk graf yang memiliki himpunan invers dominasi total, himpunan ini juga tidak selalu tunggal. Lebih lanjut, pada beberapa kelas graf, untuk kondisi tertentu memungkinkan memuat himpunan invers dominasi total, tapi pada kondisi lainnya tidak.

Pada artikel ini secara khusus dibahas tentang bilangan invers dominasi total pada beberapa kelas graf yang memuat *cycle* (*some families of cycle-related graphs*) seperti graf *helm* tertutup, graf *gear*, graf roda ganda, dan graf *antiweb-gear*. Graf-graf ini juga merupakan graf dengan titik pusat yang berasal dari graf roda sebagai pembangunnya. Selanjutnya, berdasarkan hasil penelitian sebelumnya (Kulli & Iyer, 2007), telah diketahui bilangan invers dominasi total pada graf *cycle* dan graf roda. Hasil penelitian tersebut, kemudian dijadikan sebagai acuan dalam menemukan kondisi-kondisi yang dipenuhi sehingga graf *helm* tertutup, graf *gear*, graf roda ganda, dan graf *antiweb-gear* memiliki himpunan invers dominasi total.

Misalkan G graf sederhana, graf ini disebut graf *cycle* jika setiap titiknya berderajat dua. Graf *cycle* dengan n titik dilambangkan dengan C_n untuk $n \geq 3$ (Munir, 2010). Untuk definisi graf lainnya yang akan ditentukan bilangan invers dominasi total pada artikel ini, dinyatakan sebagai berikut:

- a. Graf roda W_n adalah graf yang dibentuk dari graf *cycle* dengan setiap titik pada graf *cycle* terhubung langsung dengan satu titik baru yang disebut titik pusat.

- b. Graf helm H_n adalah graf yang dibentuk dari graf roda dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di $cycle$ luar.
- c. Graf helm tertutup (*closed helm graph*) CH_n adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan tiap-tiap titik anting-anting untuk membentuk $cycle$.
- d. Graf *gear* G_n (kasus khusus dari graf Jahangir J_{2n}) adalah graf roda dengan tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik graf yang terhubung langsung pada $cycle$ luar.
- e. Graf roda ganda DW_n dengan $n + 1$ titik, tersusun dari graf $2C_n + K_1$, terdiri atas dua buah $cycle$ berukuran n , dimana titik-titik dari kedua $cycle$ terhubung ke sebuah pusat yang sama.
- f. Graf *antiweb-gear* adalah suatu bentuk graf yang diperoleh dari graf *gear* J_{2n} dengan mengganti sisi graf C_{2n} dengan C_{2n}^2 yang dinotasikan dengan AWJ_{2n} .



Gambar 1. (a) Graf C_4 , (b) Graf H_4 , (c) Graf W_5 , (d) Graf CH_6 , (e) Graf G_3 , (f) Graf DW_3 , (g) Graf AWJ_6

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur (kajian teori) yang berkaitan dengan teori terkait bilangan dominasi, bilangan dominasi total, bilangan invers dominasi dan bilangan invers dominasi total. Kemudian, dicari pola anggota dari himpunan invers dominasi total dan bilangan invers dominasi total dari beberapa graf yang dikaji sehingga dapat diperluas secara umum. Pola yang diperoleh terkait bilangan invers dominasi total, selanjutnya dapat digunakan untuk memformulasikan rumus umum bilangan invers dominasi total. Untuk memverifikasi kebenaran formula yang dihasilkan, tahap terakhir adalah pembuktian secara matematika. Pada tahap ini, digunakan pola elemen yang menjadi anggota himpunan invers dominasi total dan sifat-sifat terkait bilangan invers dominasi total yang telah dikemukakan berdasarkan hasil-hasil penelitian sebelumnya. Pada tahap ini pula, dapat diperoleh karakteristik dari bilangan invers dominasi total terkait kelas graf yang diteliti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Artikel ini membahas tentang bilangan invers dominasi total pada beberapa kelas graf yang memuat $cycle$. Untuk itu, diberikan beberapa definisi dan hasil penelitian sebelumnya yang

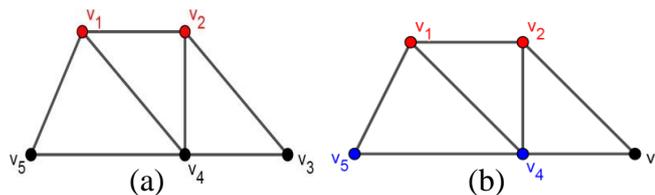
digunakan sebagai acuan dalam membuktikan hasil yang diperoleh. Jika diketahui suatu titik $v \in V(G)$ bertetangga dengan $u, w \in V(G)$, dapat dikatakan bahwa v mendominasi u dan w . Hal ini berarti bahwa konsep dominasi dapat dikaitkan dengan persekitaran terbuka suatu titik, yaitu himpunan semua titik yang bertetangga dengan titik tersebut. Konsep persekitaran terbuka suatu titik, selanjutnya dapat digunakan untuk mendefinisikan persekitaran suatu subhimpunan titik di graf G dan lebih lanjut untuk pendefinisian himpunan dominasi total. Himpunan $D_t \subseteq V$ disebut himpunan dominasi total pada graf G apabila setiap titik pada V bertetangga dengan setidaknya satu titik pada D_t , $N(D_t) = V(G)$ (Henning & Yeo, 2013). Lebih lanjut, kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi total pada graf G disebut bilangan dominasi total dan dinyatakan dengan $\gamma_t(G)$. Pada Proposisi 1, diberikan nilai eksak bilangan dominasi total untuk graf cycle dan pada Definisi 2 merupakan definisi himpunan dan bilangan invers dominasi.

Proposisi 1 (Kulli & Iyer, 2007) Untuk graf cycle C_n dengan n titik,

$$\gamma_t(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & n \text{ lainnya} \end{cases}$$

Definisi 2 (Kulli & Sigarkanti, 1991) Misalkan suatu himpunan D adalah himpunan dominasi dalam graf G dengan kardinalitas terkecil. Jika $V - D$ memuat suatu himpunan dominasi misal D' , maka D' disebut himpunan invers dominasi yang terkait dengan D . Kardinalitas terkecil dalam himpunan invers dominasi didefinisikan sebagai bilangan dominasi invers dari graf G yang dinotasikan dengan $\gamma^{-1}(G)$.

Berdasarkan definisi bilangan invers dominasi diperoleh $\gamma(G) \leq \gamma^{-1}(G)$. Agar lebih mudah dipahami, diberikan contoh mengenai himpunan dominasi dan himpunan invers dominasi yang diilustrasikan di Gambar 2.



Gambar 2. (a) Graf G_1 dan (b) Graf G_2

Pada Gambar 2 (a), titik v_1 dan v_2 (diwarnai merah) merupakan titik-titik pada himpunan dominasi. Pada Gambar 2 (b), titik v_4 dan v_5 merupakan titik-titik pada himpunan invers dominasi. Himpunan dominasi yang diperoleh $D = \{v_1, v_2\}$ yang merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas terkecil. Himpunan invers dominasi terkait himpunan dominasi D salah satunya adalah $D' = \{v_4, v_5\} \subseteq V - D$ yang juga merupakan himpunan invers dominasi dengan kardinalitas terkecil. Oleh karena itu, diperoleh bilangan dominasi dan invers dominasinya adalah 2. Untuk kelas graf tertentu, dapat diperoleh bilangan invers dominasi yang sama dengan bilangan dominasinya, seperti pada graf C_n yang dinyatakan pada Proposisi 3.

Proposisi 3 (Kulli & Sigarkanti, 1991) Untuk graf cycle C_n dengan n titik,

$$\gamma(C_n) = \gamma^{-1}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Selanjutnya, berdasarkan definisi himpunan dominasi dan himpunan invers dominasi dapat pula didefinisikan konsep himpunan dan bilangan invers dominasi untuk variasi himpunan dominasi lainnya. Salah satunya tentang himpunan invers dominasi total yang dinyatakan pada Definisi 4.

Definisi 4 (Kulli & Iyer, 2007) Misalkan $D_t \subseteq V$ merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas terkecil dari graf G . Jika $V - D_t$ memuat himpunan dominasi total D'_t , maka D'_t disebut himpunan invers dominasi total dari himpunan dominasi total D_t . Bilangan invers dominasi total $\gamma_t^{-1}(G)$ merupakan kardinalitas terkecil dari himpunan invers dominasi total.

Berdasarkan Gambar 2 dan Definisi 4, diperoleh himpunan dominasi yang sekaligus merupakan himpunan dominasi total, dan himpunan invers dominasi yang juga merupakan himpunan invers dominasi total. Namun demikian, dapat pula diperoleh himpunan dominasi lainnya dari Gambar 2.(a) yaitu $\{v_1, v_3\}$ yang bukan merupakan himpunan dominasi total tetapi tetap merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas terkecil. Demikian juga dengan himpunan invers dominasi, dapat diperoleh himpunan invers dominasi $\{v_3, v_5\}$ yang bukan merupakan invers dominasi total.

Selanjutnya, bilangan invers dominasi total untuk beberapa kelas yang dibahas dalam artikel ini dinyatakan pada Teorema 5 hingga Teorema 9. Hasil pertama dinyatakan pada Teorema 5, terkait bilangan invers dominasi total untuk graf *helm* tertutup.

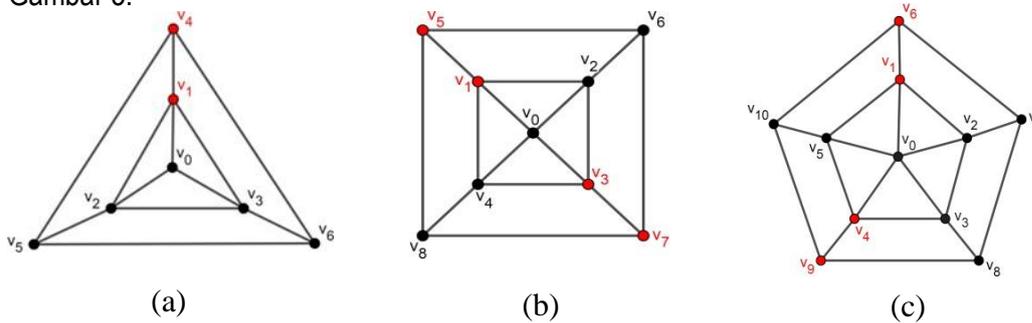
Teorema 5 Jika CH_n merupakan graf helm tertutup dengan $n \geq 3$, maka:

$$\gamma_t^{-1}(CH_n) = 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Bukti:

Diberikan graf CH_n untuk $n \geq 3$. Berdasarkan definisi CH_n , diperoleh $|V(CH_n)| = 2n + 1$ dan $|E(CH_n)| = 4n$. Graf CH_n dibentuk dari graf H_n dengan menambahkan sisi antara titik anting-anting yang berurutan sehingga terbentuk *cycle*. Himpunan dominasi total terkecil untuk graf CH_n diperoleh dengan memperhatikan graf C_n pembentuk H_n . Hal ini karena, masing-masing titik di C_n bertetangga dengan titik-titik yang bersesuaian dengan titik di C_n luar (dibentuk dari titik anting-anting pada H_n). Akibatnya, $\gamma_t(CH_n) = 2, \gamma(C_n) = 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Oleh karena, $\gamma(C_n) = \gamma^{-1}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, dengan demikian $\gamma_t^{-1}(CH_n) = \gamma_t(CH_n) = 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. ■

Sebagai ilustrasi hasil yang dinyatakan pada Teorema 5, diberikan contoh yang dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. (a) Graf CH_3 , (b) Graf CH_4 , (c) Graf CH_5

Pada Gambar 3, himpunan dominasi total untuk CH_3, CH_4 dan CH_5 berturut-turut adalah $\{v_1, v_4\}, \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ dan $\{v_1, v_4, v_6, v_9\}$ (titik-titik dengan warna merah) yang merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas terkecil. Himpunan invers dominasi total yang diperoleh terkait himpunan dominasi total tersebut, masing-masing adalah $\{v_2, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$ dan $\{v_2, v_5, v_7, v_{10}\}$. Oleh karena himpunan-himpunan invers dominasi total tersebut memiliki kardinalitas terkecil, diperoleh $\gamma_t^{-1}(CH_3) = 2, \gamma_t^{-1}(CH_4) = 4$ dan $\gamma_t^{-1}(CH_5) = 4$.

Untuk beberapa kelas graf, adanya himpunan dominasi total tidak menjamin adanya himpunan invers dominasi total. Pada graf *gear* G_n , diperoleh bahwa untuk n genap dapat ditentukan himpunan invers dominasi totalnya. Sedangkan untuk n ganjil, graf G_n tidak mempunyai himpunan invers dominasi total. Hasil ini selanjutnya dinyatakan pada Teorema 6, terkait bilangan invers dominasi total pada graf *gear*.

Teorema 6 Jika G_n merupakan gear graph dengan $n \geq 3$, maka $\gamma_t^{-1}(G_n) = n, n = 2k, k \in \mathbb{N}$.

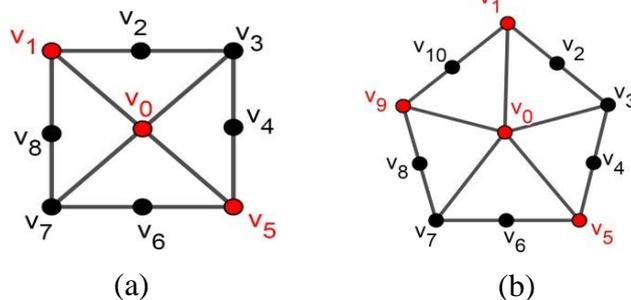
Bukti:

Diberikan graf G_n untuk $n \geq 3$. Berdasarkan definisinya, graf G_n dapat dibentuk dari graf W_n dengan penambahan titik diantara titik-titik berurutan pada cycle luar, sehingga $V(G_n) = V(W_n) \cup \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2n}\} = \{v_0\} \cup \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2n-1}\} \cup \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2n}\}$ dengan titik-titik $v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2n}$ mempunyai derajat 2. Dengan demikian diperoleh $|V(G_n)| = 2n + 1$ dan $|E(G_n)| = 3n$. Misalkan $v_0 \in V(G_n)$ adalah titik yang memiliki derajat maksimum di G_n yaitu $\Delta(G_n) = \text{deg}(v_0) = n$, maka v_0 merupakan elemen dari himpunan dominasi total terkecil. Misalkan D_t menyatakan himpunan dominasi total terkecil, maka $D_t = \{v_0\} \cup \{v_1, v_5, v_9, \dots, v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3}\}$ merupakan salah satu himpunan dominasi total terkecil.

Untuk n ganjil, terdapat titik berderajat 2, yaitu $v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}$ dengan $N(v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}) = \{v_1, v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3}\}$ di $V(G_n)$, tetapi $N(v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}) = \emptyset$ di $V(G_n) - D_t$. Secara umum, untuk himpunan dominasi total terkecil D_t^* , terdapat suatu titik berderajat 2 di $V(G_n)$ tetapi tidak bertetangga dengan suatu titik di $V(G_n) - D_t^*$. Hal ini berakibat, $V(G_n) - D_t^*$ tidak memuat himpunan dominasi total.

Untuk n genap, titik $v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}$ yang berderajat 2, memiliki $N(v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}) = \{v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3}, v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}\}$ di $V(G_n)$ dan $N(v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}) = v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ di $V(G_n) - D_t$. Agar $v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ mempunyai tetangga di $V(G_n) - D_t$, himpunan invers dominasi total harus memuat komponen $v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ dan $v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}$, atau $v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ dan $v_{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$. Secara umum, untuk himpunan dominasi total terkecil D_t^* , $V(G_n) - D_t^*$ memuat komponen v_{i-1}, v_i, v_{i+1} dengan $N(v_i) = \{v_0, v_{i-1}, v_{i+1}\}$ dan v_{i-1}, v_{i+1} titik-titik berderajat 2. Oleh karena itu, jika untuk setiap i , v_{i-1} dan v_i , atau v_i dan v_{i+1} merupakan komponen dari $D_t' \subseteq V(G_n) - D_t^*$, maka D_t' merupakan himpunan invers dominasi total terkecil untuk himpunan dominasi total D_t^* (v_i simpul berderajat maksimum di $V(G_n) - D_t^*$). Karena $v_i \in D_t'$ untuk $N(v_i) = \{v_0, v_{i-1}, v_{i+1}\}$ dan, $v_{i-1} \in D_t'$ atau $v_{i+1} \in D_t'$, akibatnya $\gamma_t^{-1}(G_n) = |D_t'| = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = 2 \left(\frac{n}{2}\right) = n$. ■

Untuk ilustrasi, disajikan pada Gambar 4. Titik-titik berwarna merah merupakan titik-titik pada himpunan dominasi total terkecil graf G_4 dan G_5 . Pada graf G_4 mempunyai himpunan invers dominasi total dengan kardinalitas terkecil, $\{v_2, v_3, v_6, v_7\}$. Dengan demikian diperoleh $\gamma_t^{-1}(G_4) = 4 = 2 \left(\frac{4}{2}\right)$. Graf G_5 tidak mempunyai himpunan invers dominasi total, karena terdapat $v_{10} \in V(G_4) - \{v_0, v_1, v_5, v_9\}$ yang merupakan simpul terisolasi di $\langle V(G_4) - \{v_0, v_1, v_5, v_9\} \rangle$.



Gambar 4. (a) Graf G_4 , (b) Graf G_5

Teorema 7 Jika DW_n merupakan graf roda ganda dengan $n \geq 3$, maka:

$$\gamma_t^{-1}(DW_n) = \begin{cases} n, & n = 4k \\ n + 1, & n = 2k + 1 \\ n + 2, & n = 2(2k + 1) \end{cases}$$

Bukti:

Diberikan graf DW_n , $n \geq 3$ dengan $|DW_n| = 2n + 1$ dan v_0 titik yang bertetangga dengan setiap titik di DW_n . Oleh karena itu, $\{v_0, a\}$ merupakan himpunan dominasi total terkecil di DW_n dengan $a \in A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ atau $a \in B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Misalkan $D \subseteq V(DW_n) - \{v_0, a\}$, maka D merupakan himpunan invers dominasi total dari DW_n jika D merupakan himpunan dominasi total terkecil. Akibatnya D merupakan gabungan himpunan dominasi total terkecil dari 2 graf cycle berorde n yaitu $D \cap A = C_1$ dan $D \cap B = C_2$ dengan $C_1 \cup C_2 = D$ dengan demikian:

$$\begin{aligned} \gamma_t^{-1}(DW_n) &= \gamma_t(C_n) + \gamma_t(C_n) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \left(\frac{n}{2} + 1\right), & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{lainnya} \end{cases} \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa,

Untuk $n \equiv 2 \pmod{4}$

$$\gamma_t^{-1}(DW_n) = \frac{2n}{2} + 1 = n + 1.$$

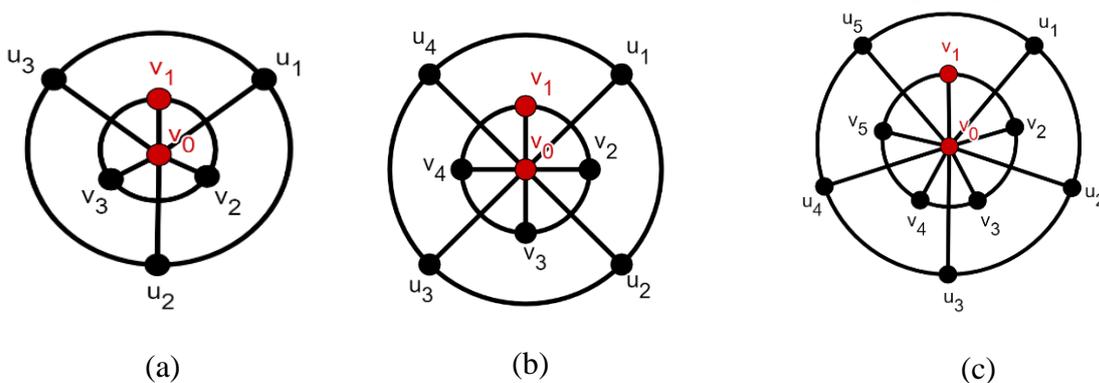
Untuk $n \equiv s \pmod{4}$, $s \in \{1, 3\}$. untuk kasus ini, n merupakan bilangan ganjil sehingga $n = 2k + 1$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \gamma_t^{-1}(DW_n) &= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{8k+1}{2} \right\rceil \\ &= k + \frac{1}{2} + [k] + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \\ &= 2k + 2 \\ &= (2k + 1) + 1 \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Untuk $n \equiv 0 \pmod{4}$, untuk kasus ini, $n = 4k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \gamma_t^{-1}(DW_n) &= \left\lceil \frac{4k}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{4k}{2} \right\rceil \\ &= 2k + 2k \\ &= 4k \\ &= n. \blacksquare \end{aligned}$$

Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 5. Titik-titik berwarna merah merupakan titik-titik pada himpunan dominasi total. Dapat diketahui bahwa, untuk setiap $n \geq 3$, $\gamma_t(DW_n) = 2$.



Gambar 5. (a) Graf DW_3 , (b) Graf DW_4 , (c) Graf DW_5

Himpunan invers dominasi total, $D' \subseteq V(DW_n) - \{v_0, v_1\}$ untuk $n = 3, 4, 5$ berturut-turut adalah $\{v_2, v_3, u_1, u_2\}$, $\{v_2, v_3, u_1, u_2\}$, $\{v_2, v_3, v_4, u_1, u_2, u_3\}$. Bilangan invers dominasi total yang diperoleh adalah $\gamma_t^{-1}(DW_3) = 4$, $\gamma_t^{-1}(DW_4) = 4$ dan $\gamma_t^{-1}(DW_5) = 6$.

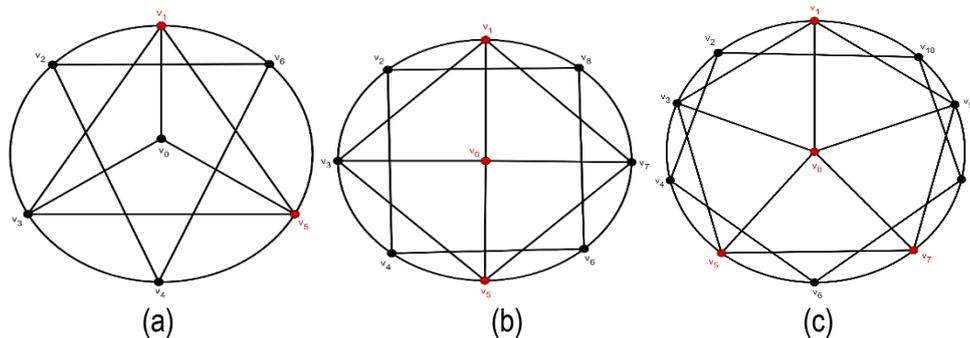
Teorema 8 Jika AWJ_{2n} merupakan graf *antiweb-gear* dengan $n \geq 3$, maka:

$$\gamma_t^{-1}(AWJ_{2n}) = 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Bukti:

Diberikan graf AWJ_{2n} untuk $n \geq 3$. Berdasarkan definisinya, graf AWJ_{2n} memiliki $V(AWJ_{2n}) = V(G_n)$, dapat dibentuk dari graf G_n dengan menghubungkan titik-titik berderajat 2 (berurutan) sehingga menjadi titik berderajat 4, serta menghubungkan titik-titik berderajat 3 (berurutan) sehingga menjadi titik berderajat 5. Dengan demikian, diperoleh $|AWJ_{2n}| = 2n + 1$ dan $|E(AWJ_{2n})| = 5n$. Titik $v_0 \in V(AWJ_{2n})$ adalah salah satu titik yang memiliki derajat maksimum di AWJ_{2n} , $n \geq 5$ yaitu $\Delta(AWJ_{2n}) = \text{deg}(v_0) = n$, maka v_0 elemen dari himpunan dominasi total terkecil. Oleh karena titik v_0 tidak bertetangga dengan titik berderajat 4 di AWJ_{2n} , maka salah satu himpunan dominasi total terkecil di AWJ_{2n} sama dengan himpunan dominasi total terkecil di G_n . Misalkan D_t adalah himpunan dominasi total terkecil di AWJ_{2n} yang memuat v_0 . Pada AWJ_{2n} , terdapat *cycle* luar yang memiliki panjang $2n$ dengan simpul-simpul pembentuknya berderajat 4 atau 5. Karena titik-titik berderajat 5 bertetangga dengan v_0 , himpunan invers dominasi total terkait D_t memiliki kardinalitas yang sama dengan gabungan himpunan dominasi terkecil dari C_n yang dibentuk dari titik-titik v_i , $0 \neq i$ genap dan himpunan dominasi terkecil dari C_n yang dibentuk dari titik-titik v_i , i ganjil. Akibatnya diperoleh,

$$\gamma_t^{-1}(AWJ_{2n}) = 2\gamma^{-1}(C_n) = 2\gamma(C_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor. \blacksquare$$



Gambar 6. (a) Graf AWJ_6 , (b) Graf AWJ_8 , (c) Graf DW_{10}

Ilustrasi terkait himpunan dominasi total, disajikan pada Gambar 6, yang selanjutnya dapat digunakan sebagai acuan untuk menentukan himpunan invers dominasi total. Titik-titik berwarna merah merupakan titik-titik pada himpunan dominasi total terkecil graf AWJ_6 , AWJ_8 dan AWJ_{10} . Himpunan dominasi total masing-masing graf tersebut berturut-turut adalah $\{v_1, v_5\}$, $\{v_0, v_1, v_5\}$ dan $\{v_0, v_1, v_5, v_7\}$ yang merupakan himpunan dominasi total dengan kardinalitas terkecil. Terkait himpunan dominasi total ini, diperoleh himpunan invers dominasi totalnya adalah $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_4, v_6, v_7\}$ dan $\{v_3, v_4, v_8, v_9\}$. Dengan demikian, bilangan invers dominasi total yang diperoleh, $\gamma_t^{-1}(AWJ_6) = 2$, $\gamma_t^{-1}(AWJ_8) = 4$ dan $\gamma_t^{-1}(AWJ_{10}) = 4$.

KESIMPULAN

Bilangan invers dominasi total suatu graf G yang dilambangkan dengan $\gamma_t^{-1}(G)$ menyatakan kardinalitas terkecil himpunan invers dominasi total di G . Pada artikel ini, diperoleh bahwa tidak semua graf mempunyai himpunan invers dominasi total, sebagai contohnya graf *gear* G_n untuk n ganjil. Bilangan invers dominasi total untuk graf *helm* tertutup, graf *gear*, graf roda ganda dan graf *antiweb-gear* berturut-turut adalah $\gamma_t^{-1}(CH_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ dan $\gamma_t^{-1}(G_n) = n$, n genap,

$\gamma_t^{-1}(DW_n) = n$, untuk $n = 4k$, $\gamma_t^{-1}(DW_n) = n + 1$, untuk $n = 2k + 1$ dan $\gamma_t^{-1}(DW_n) = n + 2$, $n = 2(2k + 1)$ dengan $k \in \mathbb{N}$, serta $\gamma_t^{-1}(AWJ_{2n}) = 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

REKOMENDASI

Berdasarkan hasil penelitain, telah diperoleh bilangan invers dominasi total untuk graf *helm* tertutup, graf *gear*, graf roda ganda dan graf *antiweb-gear* yang masing-masing merupakan graf yang dibangun dari graf *cycle* C_n . Penelitian lebih lanjut dapat dilakukan untuk hasil operasi graf-graf yang telah diketahui bilangan invers dominasi totalnya. Selain itu, dapat pula dikaji terkait banyaknya himpunan invers dominasi maupun invers dominasi total yang mungkin pada suatu graf.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Novita, Febby dan Nurhamzah, dan DIPA FMIPA Universitas Tanjungpura untuk pendanaan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Adali, T., & Ortega, A. (2018). Applications of graph theory [scanning the Issue]. *Proceedings of the IEEE*, 106(5), 784–786. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2018.2820300>
- Dunbar, J., Hedetniemi, S., Henning, M. A., & McRae, A. (1999). Minus domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 199(1–3), 35–47. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(98\)00284-2](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(98)00284-2)
- El-Zahar, M., Gravier, S., & Klobucar, A. (2008). On the total domination number of cross products of graphs. *Discrete Mathematics*, 308(10), 2025–2029. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.04.034>
- Henning, M. A., & Yeo, A. (2013). Total domination and graph products. *Total Domination in Graphs* (103–108). Springer.
- Kulli, V. R., & Iyer, R. R. (2007). Inverse total domination in graphs. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 10(5), 613–620. <https://doi.org/10.1080/09720529.2007.10698143>
- Kulli, V. R., & Sigarkanti, S. C. (1991). Inverse domination in graphs. *Nat. Acad. Sci. Lett*, 14(12), 473–475.
- Lan, J. K., & Chang, G. J. (2013). On the mixed domination problem in graphs. *Theoretical Computer Science*, 476, 84–93. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2012.11.035>
- Mashaghi, A. R., Ramezani, A., & Karimipour, V. (2004). Investigation of a protein complex network. *European Physical Journal B*, 41(1), 113–121. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2004-00301-0>
- Mujib, A. (2019). Bilangan kromatik permainan graf pot bunga ($C_m S_n$) dan graf pohon palem ($C_k P_l S_m$). *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, 4(1), 13-22. <https://doi.org/10.25157/teorema.v4i1.1903>
- Munir, R. (2010). *Matematika diskrit ed ke-3*. Bandung: Informatika.
- Omran, A. A., & Shalaan, M. M. (2020). Inverse co-even domination of graphs. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 928). <https://doi.org/10.1088/1757-899X/928/4/042025>

Rusu, I., & Spinrad, J. (2001). Domination graphs: examples and counterexamples. *Discrete Applied Mathematics*, 110(2–3), 289–300. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(00\)00274-2](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(00)00274-2)

Shah, P., Ashourvan, A., Mikhail, F., Pines, A., Kini, L., Oechsel, K., ... Davis, K. A. (2019). Characterizing the role of the structural connectome in seizure dynamics. *Brain*, 142(7), 1955–1972. <https://doi.org/10.1093/brain/awz125>

Tarr, J. M. (2010). Domination in graphs. *Master Thesis, University of South Florida, South Florida, 2010. [Online].* <https://scholarcommons.usf.edu/etd/1786>